數學傳播　50卷2期, pp. 24-64

Green 函數 — 微分方程的施洗約翰

林琦焜

1. 施洗約翰 (John the Baptist)

『那時, 有施洗的約翰出來, 在猶太的曠野傳道, 說 :『天國近了, 你們應當悔改!』這人就是先知以賽亞所說的。他說 :『在曠野有人聲喊著說 : 預備主的道, 修直祂的路!』

— 新約聖經 (馬太福音 三 1-3) —

從有文明的開始, 時間 (Time) 就扮演著核心的角色, 迄今它仍然是我們所處世界中最神秘的概念之一。在《蒂邁歐篇》(Timaeus) 中, 柏拉圖在描述造物主的創世時指出 :「製造一個運動著的永恆的影像, 於是他在整飭天宇的時候, 爲那留止於一的永恆造了依數運行的永恆影像, 這個影像我們稱之爲時間。」簡言之, 柏拉圖把時間看作是「永恆之運動的形象」。他認爲, 時間的出現伴隨著「天」, 即與開始創造宇宙一起出現, 宇宙終結時它也結束。亞里士多德爲了反對柏拉圖的時間觀, 在《物理學》中把時間看作是「不動的推動者和記數的奴斯[1]」, 規定爲「就先後而言的運動的數目。」他在運動的範圍內討論時間。奧古斯丁 (St. Augustine, AD354~430) 在《懺悔錄》(Confessions) 中, 透過內省方式研究時間之流的思路及其對時間的追問, 徹底改變古希臘人將時間視爲外在客觀物理 (運動) 之流的傳統時間觀, 而轉向人類心靈 (思想—意識) 的伸展。

『甚麼是時間? 如果沒有人問我, 我知道。如果我要向發問者解釋, 我則一無所知。但我可以肯定我知道的是, 如果沒有東西逝去, 則不會有過去的時間; 如果沒有東西到來, 則不會有將來的時間; 如果沒有東西存在, 則不會有現在的時間。但考察那兩個時態 —「過去」和「將來」; 過去如何存在, 如果它已經不存在? 將來如何存在, 如果它還沒有存在? 但如果現在一直是現在, 它則不會逝去而成爲過去 : 如此則不會有時間而只有永恒。』

— 懺悔錄 (奧古斯丁) —

[1] 奴斯 (Nous) 是古希臘哲學家阿那克薩哥拉 (Anaxagoras, 500BC~428BC) 提出的哲學術語, 原指感知與理解事物的能力, 被視爲推動宇宙運作的基本實體, 常譯作《理性》或《心靈本原》。

基督教神學家保羅-田立克說：「從哲學上說, 時間學說是奧古斯丁的最大成就, 因爲在這裡, 他真正開始了關於時間概念之思想的新時代。」

中文或英文用於《時間》的單字只有一個, 但是希臘文則有兩個: 一個是《*chronos*》意思是以時鐘計量的時間。例如; 我們用在 chronology (年代學, 按年代編排) 和 chronometer (精密定時器) 等詞一樣; 另一個是《*kairos*》(凱洛斯), 它不是像時鐘上看到的數字的時間, 而是做爲時機之質量的時間, 那個正確的時刻或特殊的時刻! 凱洛斯 (kairos) 是這樣的時間, 它表明那促使一個行爲可能或不可能的事情已經發生, 也就是聖經所說的到時候滿足了。我們在生活中都經歷了這個時刻, 感到現在是做某件事的正確時刻, 現在這個時候已成熟是做決定的時刻, 這就是凱洛斯 (kairos)。無疑在基督教的歷史耶穌的誕生就是那個《凱洛斯》! 但是在耶穌之前呢? 猶太人經歷亡國、被虜與流亡, 在信仰幾乎破產之時先知[2]進入以色列歷史。所以有聖經學者說先知是上帝給以色列人的恩典, 他們是上帝在以色列歷史最黑暗的時期, 特別被呼召興起的一群人, 先知是上帝的代言人, 講傳特殊的信息。有別於世俗的卜卦算命與占星術, 先知是時代的良心, 爲百姓作守望者。先知的角色在以色列歷史中至關重要, 尤其是在國家動盪和道德衰退的時期。他們不僅是上帝的代言人, 也是社會的道德指南, 經常面對權力的挑戰, 堅持傳達真理。在先知瑪拉基之後,「神的聲音」靜默了四百多年。沉寂被曠野的呼聲所打破, 這個人就是出現在舊約和新約中間在耶穌基督誕生之前的關鍵人物。他被上帝揀選呼召成爲先知, 他是耶穌的先鋒, 爲將要來臨的耶穌鋪下救恩之路, 這人就是 — 施洗約翰[3](John the Baptist)。施洗約翰的事跡在新約聖經有明確的記載, 特別《馬可福音》中講述了他遇害的故事：施洗約翰批評了希律王娶了他已故兄弟的妻子希羅底, 並因此多次指責他說：「你娶這個婦人是不對的。」希律想殺掉約翰, 但怕觸怒百姓, 因爲他們都相信施洗約翰是先知。然而希羅底則處心積慮尋求報復。在希律的生日宴會上, 希羅底的女兒莎樂美以她的舞蹈使希律王大爲興奮, 以至於希律答應給她任何想要的獎賞。在她母親希羅底的慫恿下, 莎樂美要求得到施洗約翰的頭顱, 於是希律王下令將施洗約翰處決。與蘇格拉底一樣施洗約翰之死都是爲信仰和真理而獻身的典範。他們的死讓生命的價值變得有意義。獨裁者都想透過這種方式使反對者閉嘴, 然而正如蘇格拉底之死：

『我走了, 可眞理, 才剛剛開始說話!』

房龍 (Hendrik Willem Van Loon, 1882∼1944) 的名著《聖經的故事》對於這個故事最後則是以歷史學家的春秋之筆寫說:

---

[2]先知這個字的英文《*prophet*》源自希臘文《*prophetes*》意思是上帝的代言者。事實上 (希伯來文) 中有兩個字和這個名詞相當: 一是《hozeh》或《roéh》來指稱先知, 前者的意思是《有遠見的人》, 後者的意思是《先見》。這些稱呼暗示, 先知可以“預見”或“看到”別人所不能看見的事。他們可以“看到”或“預見”到當前的具體情況, 以及上帝對未來的旨意。其次,《舊約》最常使用希伯來文《*nabi*》一詞來指「先知」, 它的詞根意思是《宣告》, 原文的意義是《如泉湧出》, 是指他受聖靈感動, 把神的話像活泉一般湧到外面,「因爲預言從來沒有出於人意的, 乃是人被聖靈感動說出神的話來。」(彼後一 21)。意味著先知是一個發佈 (或宣佈) 重要信息的人。無論怎樣, 先知的職份是代言, 宣講上帝的真理。

[3]約翰 (John) 這個名字來源於希伯來文 Yohanan, 由兩個字組成 ：“Yahweh”是神名 YHWH, Yahweh (雅威或耶和華) 和“hanan”的縮寫形式, 意思是《仁慈》或《表現出恩惠》。兩者合併意思是『上帝是仁慈的』或『耶和華施恩』。

『施洗約翰就這麼死了, 只因爲他是一個向這喜歡聽好話的世界說眞話的先知！』

— 聖經的故事 (房龍) —

科學與數學的發展史自古希臘的輝煌成就之後也經歷了千年的沉默! 緊接著宗教改革與文藝復興由於哥白尼、伽利略 ··· 等人扮演類似於施洗約翰的先知性工作, 導致了第一個科學史的《凱洛斯》可以說是牛頓的科學革命。這可以英國詩人波普 (Pope) 模仿聖經創世紀爲牛頓所寫的墓誌銘爲代表:

『自然和自然律隱匿於黑夜之中。上帝說: 要有牛頓, 於是, 一切都變得光明。』

“Nature and Nature’s laws lay hid in night; God said, Let Newton be! and all was light.”

— Alexander Pope (1688∼1744) —

馬克士威 (James Clerk Maxwell, 1831∼1879) 於 1864 年發表的電磁場理論與牛頓的運動方程式同樣是出自人類思想的最高結晶。我們可以說這是科學史的第二次《凱洛斯》, 這是建立在法國物理學家庫倫 (Charles Augustin Coulomb, 1736∼1806)、安培 (André-Marie Ampére, 1775∼1836) 還有特別是英國物理學家法拉第 (Michael Faraday, 1791∼1867) 的開創性工作。在不可感知的電磁世界並不需要牛頓力學的介質, 此時物理的實在不再是可見、可觸的物質而是《場》(field)。1845 年法拉第首先利用空間也就是場 (field) 的概念來解釋某些物理現象, 並提出可以具體化地描述場的力線觀念來說明磁場。他還認爲萬有引力與磁力、電力一樣可以用力線來描繪。6 年後蘇格蘭物理學家 William Thomson (1824∼1907), 後來受勳被封爲開爾文勳爵 (Lord Kelvin)[4] 於 1851 年給場 (field) 一個正式的定義以反對超距作用。他的想法被同是蘇格蘭同胞馬克士威所採納, 從此場成爲物理學最重要的概念。牛頓力學是「質點」的物理學, 相對地馬克士威的電磁學是「場」(field) 的物理學, 牛頓力學是以遠距作用力的設想爲依據, 而馬克士威的電動力學理論則是以場作用或近距離作用的設想爲依據。場是自牛頓以來, 最重要的洞見。將場從必須有一個機械載體與之相聯繫的假設中解放出來, 這在科學思想發展史中, 在心理上是最令人感到興趣的事件。用來描述物理現象最重要的不是帶電體、粒子, 而是帶電體之間粒子與粒子之間的場, 這需要極大的科學想像力才能理解。馬克士威的電磁學理論具備完整的數學品格, 尤其光是電磁波是基於數學推理所做出的預言, 這個例子說明了數學的非凡價值。

正如施洗約翰, 格林 (George Green, 1793∼1841) 在電磁學的數學理論也做了先知開創性的工作, 然而在他生前這個重要成果在數學界並不爲人所知。而是 1846 年, Lord Kelvin 重新發現了格林的工作, 並將其普及給後來的科學界, 其中直接影響了馬克士威。除了本文要介紹

[4]威廉-湯姆遜終生都待在他的故鄉—蘇格蘭的格拉斯哥。這個城市有一條小河叫開爾文小河。威廉-湯姆遜於 1892 年受封爲開爾文勳爵就是源於此河流!

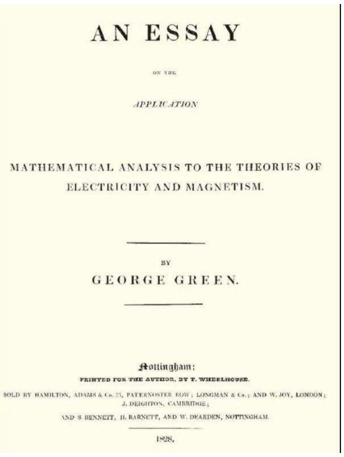
的格林函數 (Green function) 之外, 格林另一個重要工作就是微積分 (向量分析) 的格林定理 (Green Theorem)。二維格林定理的變形就是 Stokes 定理與散度定理, 而事實上 G. Stokes 是透過 Lord Kelvin 得知此定理。花了一段時間得出其證明之後, Stokes 把這個定理作爲劍橋的數學競試題目! 令人驚訝的是竟然有學生 (在幾個小時之內) 解決了該問題, 其中的一位正是馬克士威。真是青出於藍、更勝於藍。

2. 格林函數之起源 — George Green (1793∼1841)

『一、兩代之前的年輕理論物理學家們堅信: 如果你到 30 歲還沒做出什麼大成果, 那你就永遠做不成什麼大事了。顯然, 他們並不熟悉諾丁漢磨坊主 George Green 的歷史。』

— Julian Schwinger (1918∼1994) —

格林函數這個令人著迷的概念源於英國數學物理學家 George Green (1793∼1841) 的洞察力和直覺, 他的原創工作幾乎一生都未被重視 — 主要是因爲他不同尋常的方法不見容於學院派。George Green 出生於 1793 年, 1837 年在劍橋大學獲得文學學士學位時, 他已經 44 歲了。他的年齡和無法接受「系統訓練」對他而言是不利的, 當時似乎很少有人意識到他非凡的能力。兩年後的 1839 年, 他被選爲學院的 fellow, 但由於健康狀況不佳, 幾乎立即離開, 回到家中, 並於 1841 年去世, 這對數學界來說無疑是一個沉重的損失。他的第一篇論文發表於 1828 年, 比他開始正式學習早了五年。他完全自學成才, 出版自己的作品遇到了很大困難。有趣的是, 在下一代英國另一位物理學家 Oliver Heaviside (1850∼1925) 也因爲完全相同的原因 — 解決問題的方法不尋常而難以使自己的研究成果被接受發表。


AN ESSAY

ON THE

APPLICATION

OF

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY

GEORGE GREEN.

Nottingham:

PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 33, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co.; AND W. JOY, LONDON; J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;

AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.

圖 1: 格林 1828 年論文的封面

事實上, 是 Lord Kelvin (開爾文勳爵) 在格林去世四年後 (1845 年) 重新發現了格林的《第一篇論文》, 並將其推薦給 J. Liouville (1809∼1882) 等大數學家 (在 Sturm-Liouville 問題上可以淸晰看到格林的影子!)。他們爲格林所作工作的重要性所驚訝之餘, 又將其推廣給更多的數學家同行。最後 Lord Kelvin 安排這篇論文在 19 世紀 50 年代的《*Crelle's Journal*》上正式發表。在這篇數學物理的開創性著作《論數學分析在電磁理論中的應用》(An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism)。George Green 試圖確定真空中由特定電位的導體所包圍的電位。依照今天的數學符號, 可以說他考察了在三維空間中的一個有界區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 內 Poisson 方程的解 (也就是非齊次 Laplace 方程), 這些解滿足邊界 $\partial\Omega$ 上的某些邊界條件 (Dirichlet 邊界條件)

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \qquad u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

爲了解決這個邊界值問題, Green 首先考慮了非齊次項爲單位點電荷的問題。用現代的數學符號來表示, 這相當於他試圖解偏微分方程式：

$$\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega, \tag{2.2}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$ 是著名的 Dirac δ-函數。今天我們知道 (2.2) 的解爲

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 + |x_3 - \xi_3|^2}}. \tag{2.3}$$

正是一般熟知的 (三維) 基本解 (fundamental solution) 可以理解爲靜電學的電位。Green 顯然知道 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 是函數 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 的奇異點 (singularity), 所以 Green 整個思想的核心：並沒有直接去解 (2.1)! 而是換一條路, 從後來以他的名字命名的 Green 第二等式出發

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\boldsymbol{x} = \iint\limits_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} dS_{\boldsymbol{x}} = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS_{\boldsymbol{x}} \tag{2.4}$$

現在選取 $u(\boldsymbol{x})$ 滿足 (2.1) 而 $v(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 滿足 (2.2), 則 (2.4) 改寫爲

$$\iiint\limits_{\Omega} \Big(u(\boldsymbol{x})\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta u(\boldsymbol{x}) \Big) d\boldsymbol{x} = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(u(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{2.5}$$

假設 $\boldsymbol{\xi}$ 在 Ω 內部但它是 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 的奇異點, 並默認等式

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \iiint\limits_{\Omega} u(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{x} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \delta * u; \tag{2.6}$$

意思是, 給定 (連續) 函數 $u(\boldsymbol{x})$ 則 Dirac δ-函數告訴你 u 只在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 取值。將 (2.6) 代入 (2.5) 就是格林表現公式 (Green's representation formula)

$$u(\boldsymbol{\xi})=\iiint\limits_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\Delta u(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\iint\limits_{\partial\Omega}\left(u(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{2.7}$$

如果再加上齊次 Dirichlet 邊界條件 (homogeneous Dirichlet boundary condition)

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=0,\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \tag{2.8}$$

則由 (2.7) 得一般熟悉的非齊次 Laplace 方程或 Poisson 方程 (2.1) 的解

$$u(\boldsymbol{\xi})=u_1(\boldsymbol{\xi})+u_2(\boldsymbol{\xi})=\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{x}+\iint\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{2.9}$$

這個解由兩部份組成：第一部份是體積分

$$u_1(\boldsymbol{\xi})\overset{\text{def}}{=}\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{2.10}$$

稱爲牛頓位 (Newtonian potential) 這是非齊次項 $f(\boldsymbol{x})$ 的影響 (可以視爲特解)。第二部份是曲面積分

$$u_2(\boldsymbol{\xi})\overset{\text{def}}{=}\iint\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}dS_{\boldsymbol{x}},\qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \tag{2.11}$$

也稱爲雙層位勢 (double layer potential) 是來自邊界條件 $g(\boldsymbol{x})$ 的貢獻。問題 (2.1) 的解 $u(\boldsymbol{\xi})$是$u_1(\boldsymbol{\xi})$ 與 $u_2(\boldsymbol{\xi})$ 的和則說明了線性微分方程的解是由非齊次項與邊界條件疊加而來。

註解:

(i) 由於微積分教科書的影響, 老師這麼教、學生也是這麼學：先教二維的 Green 定理, 而後是三維的 Stokes 定理與 Gauss 散度定理 (Gauss divergence theorem)。造成學生 (包括老師) 將這三個定理認定是彼此互相獨立的成果, 並誤以爲當初格林解決的是二維的問題, 這是極大的誤解。記得有一次與劉太平院士及尤釋賢教授兩位師友閒聊談到這問題時, 他們兩人異口同聲並以非常堅決的語氣強調: 格林的工作是三維的! 這也是我在這篇文章專門講三維空間的初衷, 除了釐清歷史之外也感受當初格林的想法。

(ii) 格林第二等式 (2.4) 是散度定理的直接推論, 也是格林函數的起點。因此要真正理解格林函數必須回到格林由此出發! 根據 Leibniz 法則 (加一項減一項)

$$\begin{cases} u\Delta v=u\,\mathrm{div}(\nabla v)=u\,\mathrm{div}(\nabla v)+\nabla u\cdot\nabla v-\nabla u\cdot\nabla v=\mathrm{div}(u\nabla v)-\nabla u\cdot\nabla v,\\ v\Delta u=v\,\mathrm{div}(\nabla)u=v\,\mathrm{div}(\nabla u)+\nabla v\cdot\nabla u-\nabla v\cdot\nabla u=\mathrm{div}(v\nabla u)-\nabla v\cdot\nabla u.\end{cases} \tag{2.12}$$

兩式相減得散度形式 (全微分)

$$\begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} = u\Delta v - v\Delta u = \operatorname{div}\big(u\nabla v - v\nabla u\big) = \operatorname{div}\begin{vmatrix} u & v \\ \nabla u & \nabla v \end{vmatrix}; \tag{2.13}$$

這就是 Lagrange 恆等式。積分 (2.13) 並利用高斯散度定理得格林第二等式 (2.4) 表示爲行列式

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} d\boldsymbol{x} &= \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\begin{vmatrix} u & v \\ \nabla u & \nabla v \end{vmatrix} d\boldsymbol{x} \\ &= \iint\limits_{\partial\Omega} \begin{vmatrix} u & v \\ \nabla u & \nabla v \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{n} dS_{\boldsymbol{x}} = \iint\limits_{\partial\Omega} \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \end{vmatrix} dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

(iii) 藉由量綱分析容易判斷格林第二等式 (2.4) 或 (2.14) 是量綱平衡 (dimensional balance):

$$\Big[\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v d\boldsymbol{x}\Big] = [u]\frac{[v]}{\mathrm{L}^2}\mathrm{L}^3 = [u][v]\mathrm{L}, \qquad [d\boldsymbol{x}] = \mathrm{L}^3,$$

$$\Big[\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u d\boldsymbol{x}\Big] = [v]\frac{[u]}{\mathrm{L}^2}\mathrm{L}^3 = [u][v]\mathrm{L},$$

$$\Big[\iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}}\Big] = [u]\frac{[v]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2 = [u][v]\mathrm{L}, \qquad [dS_{\boldsymbol{x}}] = \mathrm{L}^2,$$

$$\Big[\iint\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}}\Big] = [v]\frac{[u]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2 = [u][v]\mathrm{L},$$

被積分函數如果有 Laplace 算子 Δu 或 Δv 由於比方向導數 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 或 $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 多了一次微分, 因此可以多積分一次! 所以格林第二等式 (2.4) 或 (2.14) 的左邊是體積分而右邊是曲面積分。n 維空間格林第二等式 (2.4) 或 (2.14) 仍然成立而且是量綱平衡, 此時體積分與曲面積分之量綱爲

$$[d\boldsymbol{x}] = \mathrm{L}^n, \qquad [dS_{\boldsymbol{x}}] = \mathrm{L}^{n-1}.$$

(iv) 由 (2.3) 明顯可知 (針對 Laplace 算子 Δ) 三維空間的格林函數 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 的量綱爲 $[G] = \mathrm{L}^{-1}$, 這個事實也可以由 (2.2) 看得出來:

$$\Big[\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\Big] = [\delta(\boldsymbol{x})]\mathrm{L}^3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad [\delta(\boldsymbol{x})] = \mathrm{L}^{-3}, \tag{2.15}$$

$$\frac{[G]}{\mathrm{L}^2} = [\Delta G] = [\delta(\boldsymbol{x})] = \mathrm{L}^{-3} \quad \Longrightarrow \quad [G] = \mathrm{L}^{-1}. \tag{2.16}$$

直觀而言, 三維空間的格林函數差不多就是一次微分!

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.17}$$

有了這個預備工作就可以從量綱分析的角度來理解 Poisson 方程 Dirichlet 問題的解 (2.9)。首先由 (2.1) 可得 f、g 的量綱

$$[f] = [\Delta u] = [u]\mathrm{L}^{-2}, \qquad [g] = [u].$$

因此由 (2.10)、(2.11) 可得

$$[u_1] = [f][G]\mathrm{L}^3 = [u]\mathrm{L}^{-2}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{L}^3 = [u],$$

$$[u_2] = [g]\frac{[G]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2 = [u]\frac{\mathrm{L}^{-1}}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2 = [u],$$

也就是 (2.9) 是量綱平衡 (dimensional balance)。如果是 n 維空間則仿前面的討論得

$$[\delta(\boldsymbol{x})] = \mathrm{L}^{-n}, \quad [G] = \mathrm{L}^{2-n}, \quad [f] = [\Delta u] = [u]\mathrm{L}^{-2}, \quad [g] = [u].$$

此時的格林函數 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 可視爲 $n-2$ 次微分, 而且

$$[u_1] = [f][G]\mathrm{L}^n = [u]\mathrm{L}^{-2}\mathrm{L}^{2-n}\mathrm{L}^n = [u],$$

$$[u_2] = [g]\frac{[G]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^{n-1} = [u]\frac{\mathrm{L}^{2-n}}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^{n-1} = [u].$$

(v) 我們給 Poisson 方程的 Green 表現公式 (2.9) 一個量綱的解釋。首先方程式 (2.1) 告訴我們非齊次項 $f(\boldsymbol{x})$ 基本上是 $u(\boldsymbol{x})$ 的二次微分, 所以要從 $f(\boldsymbol{x})$ 得到 (2.1) 的解, 形式上必須積分兩次。但是 $u_1(\boldsymbol{x})$ 是體積分也就是三重積分, 多積分了一次! 我們必須乘上一個相當於微分一次的積分核 (integral kernel) 而這正是格林函數 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$。其次 $g(\boldsymbol{x})$ 是微分方程的邊界條件, 要從 $g(\boldsymbol{x})$ 得到 (2.1) 的解, 自然要沿著邊界 $\partial\Omega$ 的積分, 所以 $u_2(\boldsymbol{x})$ 是一個曲面積分! 但是 $g(\boldsymbol{x})$ 與 $u(\boldsymbol{x})$ 有相同的量綱, 多積分了兩次! 直接乘上格林函數 (積分核) 還不夠, 還需要微分一次。但 $u_2(\boldsymbol{x})$ 是一個曲面積分, 那只能是曲面法向量的方向導數, 所以 u_2 這個曲面積分的積分核差不多是二階導數:

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{2.18}$$

(vi) 一般的 Green 表現公式 (2.7) 並沒有限制在 Laplace 算子, 只是格林當初是從靜電學的角度研究此問題, 自然考慮的是 Laplace 算子。只要 u 是一個平滑 (或光滑) 函數 Green

則 (2.7) 總是成立, 其靈魂是散度定理 (就是微積分基本定理) 才是我們該掌握的核心。讀者如果對於 Gilbarg-Trudinger [9] 的名著有興趣, 花點心思你會發現這本書幾乎是從 Green 表現公式 (2.7) 出發的! 我相信作者是理解格林的思想。讀者如果想從事微分方程的研究, 我會強烈建議把 Green 表現公式融會貫通, 先去體會格林的心思意念或許可以感受他最初的感受, 相信之後我們寫的文章會更有人性! □

伴隨著 Poisson 方程的 Dirichlet 問題 (2.1), 是 Poisson 方程的 Neumann 問題[5]

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = h(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

根據 Green 表現公式 (2.7), Neumann 問題 (2.19) 的解爲

$$u(\boldsymbol{\xi}) = u_1(\boldsymbol{\xi}) - u_3(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_{\Omega} f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{x} - \iint_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{x}}, \tag{2.20}$$

其中 u_3 這個曲面積分稱爲單層位勢 (single layer potential), 是由於邊界條件 $h(\boldsymbol{x})$ 的影響。此時 (2.20) 仍是量綱平衡, 我們只需檢查 u_3 的量綱

$$[h] = \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\right] = \frac{[u]}{\mathrm{L}} \quad \Longrightarrow \quad [u_3] = [G][h][dS_{\boldsymbol{x}}] = \frac{1}{\mathrm{L}}\frac{[u]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^2 = [u].$$

(2.20) 的曲面積分前面的負號 ($-$) 是有意義的。首先這是因爲 $\boldsymbol{n}$ 是朝外法向量, 其次 h 差不多是 u 的微分, 要回到 u 當然要透過分部積分 (integration by part), 而分部積分之後積分會變號

$$\text{負號} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{分部積分一次。}$$

另外 (2.20) 的體積分與曲面積分內都是相同的積分核 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 這暗示了 f 與 h 之間必須滿足某些條件! 直接由 (2.19) 可得 (不需要精確解!)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \iiint_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\nabla u(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ &= \iint_{\partial\Omega} \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} dS_{\boldsymbol{x}} = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}} = \iint_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

我們稱 (2.21) 是 Neumann 問題 (2.19) 的相容性條件 (compatibility condition) : 非齊次項(可以視爲外力) f 的體積分必須等於邊界條件 h 的曲面積分, u 在邊界 $\partial\Omega$ 的法向導數不能完全任意設定, 這是 Neumann 問題與 Dirichlet 問題最大的差別。

[5]這是德國數學家 Carl Neumann (1832∼1925) 的貢獻, 他發現二維 Laplace 方程的基本解是 $\log(1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|)$, 對數位 (logarithmic potential) 是他創造出來的一個術語, 還有這個 Neumann 並不是匈牙利數學家 John von Neumann (1903∼1957)。

3. Dirac δ-函數—靜電學的看法

『儘管前面提到的論文中運用的許多技巧都非常精妙, 但很容易看出它們只適用於特定的對象, 而且仍然缺少一種可以在任何情況下使用的通用方法。』

— George Green (1793∼1841) —

格林函數 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 滿足非齊次微分方程 (2.2), 非齊次項的 Dirac δ-函數 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 實際上要等到大物理學家 Paul Dirac (1902∼1984) 創建量子力學 (1927) 時才正式登上科學的舞台而其數學理論則需再過 10 年由 S. L. Sobolev (1936) 與 Laurent Schwartz (1950∼1951) 發展的廣義函數論 (或荷佈理論) 才完整。這離格林的創見已經百年了! 撫今追昔讓我們更感佩格林的了不起, 也對於這麼一個連一幅相片都沒有留下的數學物理學家真實的肖像感到好奇。很有可能直到過世格林都不知道自己有多麼偉大! 格林是一位自學成才的天才, 他的工作爲前一代的拉格朗日 (Lagrange) 和拉普拉斯 (Laplace) 與後來的湯姆遜 (Thomson) 和馬克士威 (Maxwell) 之間搭建了橋樑。在喬治格林誕辰 200 週年之際, 英國的魏斯敏斯特教堂 (或翻譯爲西敏寺), 在牛頓的雕像前安置一塊紀念他的牌匾 (參考圖二)。

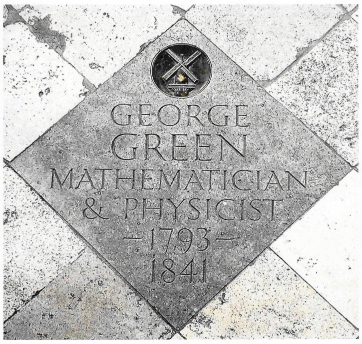


圖 2: 英國西敏寺紀念格林的牌匾

理解格林函數最好是從靜電學 (electrostatics) 出發, 將電荷放在空間中時, 在其存在的位置如果有電力作用於這個電荷的空間叫做電力場, 簡稱《電場》。放在電場內的某一點, 電量 q 的點電荷所受的電力 $\boldsymbol{F}$ 與電量成正比, 所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}. \tag{3.1}$$

這是那個點所定的物理量, 叫做電場強度, 意思是單位點電荷所受的作用力。按 cgs 制或 MKS 制描述巨觀現象的力學系統, 通常只需要三個基本量 (fundamental units)

L : (長度)　　M : (質量)　　T : (時間)。

但對於電磁學我們還需要電荷(charge)[6] 這個量以 Q 來表示, $[q] = \mathrm{Q}$: 根據電場 $\boldsymbol{E}$ 之定義 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ 與牛頓定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 可推論電場 $\boldsymbol{E}$ 之量綱爲

$$[\boldsymbol{E}] = \frac{[\boldsymbol{F}]}{[q]} = \frac{[m]\,[\boldsymbol{a}]}{[q]} = \mathrm{MLT}^{-2}\mathrm{Q}^{-1}, \qquad (\text{力/電荷})。 \tag{3.2}$$

在自然界有兩種電荷, 異性相吸、同性相斥。而電荷間作用的力和電量之乘積成正比, 與距離的平方成反比, 此定律 1776 年由英國物理學家 H. Cavendish (1731∼1810) 發現, 接著 1785 年庫侖 (Charles Augustin de Coulomb, 1736∼1806) 從實驗所確定。以純量 (scalar) 形式表示則爲

$$F = k_e\frac{q_1q_2}{r^2}, \qquad F = |\boldsymbol{F}|,$$

其中, F 是作用力, k_e 是庫侖常數其值與所用的單位有關, q_1 與 q_2 爲兩個帶有正號或負號的電荷, r 是兩個電荷彼此之間的距離, 此式稱爲庫侖定律。在真空中, 庫侖定律可以表達爲

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}, \qquad F = |\boldsymbol{F}|, \tag{3.3}$$

其中, ε_0 爲真空的電容率或介電係數 (permittivity), 它是由庫侖定律 (3.3) 所定義。爲何需要這個量呢? 比較一下 (3.3) 左邊的力 F 與右邊的 $\frac{q_1q_2}{r^2}$ 的量綱 (因次) 不相同, 因此需要引進電容率 ε_0 以維持量綱平衡。電容率的量綱 (因次) 等於

$$[\varepsilon_0] = \frac{[q_1][q_2]}{[r^2]}\frac{1}{[F]} = \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{L}^2}\frac{1}{\mathrm{LMT}^{-2}} = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^2\mathrm{Q}^2, \tag{3.4}$$

係數 $\frac{1}{4\pi}$ 則是單位球表面積之倒數, 可以藉由高斯定律計算而得。由 (3.3) 電場可以表示爲

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}, \qquad E = |\boldsymbol{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|^2}; \tag{3.5}$$

電場是向量, 大小是 E 而方向則爲 $\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$。如果有 n 不同的點電荷 q_k 位於 $\boldsymbol{x}_k$, 則利用重疊原理 (線性) 將各點都加起來

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k|^3}. \tag{3.6}$$

如果電荷分佈是連續的, (無窮) 級數可以轉化爲積分, 由於積分量綱會增加, 我們需要引進電荷密度 (charge density) 來取代電荷, 它的意義是單位體積內之電荷 : 也就是電荷密度之體積分是電荷

$$q = \iiint \varrho d\boldsymbol{x} \quad\Longrightarrow\quad [q] = [\varrho]\mathrm{L}^3 \quad\Longrightarrow\quad [\varrho] = \mathrm{QL}^{-3}, \tag{3.7}$$

[6]電磁學理論中不同的單位制, 不僅物理量之數值不同連量綱 (因次) 也不同。但無論如何對比於古典力學我們需要有第四個量。除了電荷之外最常用的是電流以 A (安培) 來表示: [電流] = A, 此時電荷的量綱爲 Q = AT。

則 (3.6) 可推廣為積分形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \varrho(\boldsymbol{\xi})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}d\boldsymbol{\xi}. \tag{3.8}$$

透過 (3.4)、(3.7) 可得 (3.8) 電場之量綱

$$[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}[\varrho]\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}^3}\mathrm{L}^3 = \mathrm{MLT}^{-2}\mathrm{Q}^{-1}$$

與 (3.2) 是一致的。(3.8) 可以視為廣義庫侖定律或積分形式的庫侖定律, 若 ϱ 已知, 則由 (3.8) 可解決所有靜電場的問題。利用關係式

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} = -\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3},$$

此時庫侖定律 (3.8) 可以改寫為

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \varrho(\boldsymbol{\xi})\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}d\boldsymbol{\xi} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\varrho(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}\right). \tag{3.9}$$

這告訴我們電場 $\boldsymbol{E}$ 可表為某個純量函數 (scalar function) 的梯度 (gradient), 由此自然而然可以定義電位 $U(\boldsymbol{x})$

$$U(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\varrho(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}, \qquad [U] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{[\varrho]}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^3 = \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2}\frac{1}{\mathrm{Q}}. \tag{3.10}$$

由量綱關係電位可以理解為單位電荷之能量。此時庫侖定律 (3.8) 就成為

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla U(\boldsymbol{x}). \tag{3.11}$$

利用 (3.11) 可以容易計算電場 $\boldsymbol{E}$ 的散度 (divergence) 與旋度 (curl)。首先是旋度

$$\text{curl } \boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{E} = -\nabla\times\nabla U = 0. \tag{3.12}$$

至於散度則需要散度定理 (Gauss 定理), 先看單個點電荷 (假設電荷 q 位於原點而積分區域是半徑等於 r 的球面)

$$\begin{aligned}\iint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \iint E\cos\theta dS = \iint \frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (\cos\theta = \cos 0 = 1).\end{aligned} \tag{3.13}$$

若是電荷分佈是連續時 q 取代為電荷密度的積分則 (3.13) 成為

$$\iint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \varrho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{3.14}$$

由 Gauss 散度定理

$$\iint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint \text{div }\boldsymbol{E}d\boldsymbol{x}. \tag{3.15}$$

所以

$$-\iiint\limits_{\Omega}\Delta U d\boldsymbol{x}=\iiint\limits_{\Omega}\text{div }\boldsymbol{E}d\boldsymbol{x}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_{\Omega}\varrho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

(3.16) 這個等式對於任意的區域 Ω 都成立, 因此去掉積分符號可得微分形式的庫侖定律

$$-\Delta U=\text{div }\boldsymbol{E}=\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\qquad \text{(庫侖定律)。} \tag{3.17}$$

庫侖定律就是電學的高斯定律, 是一個二階偏微分方程稱爲 Poisson 方程, 正是格林當初想要解決的問題。正如質量 (mass) 是萬有引力場的源 (source) 一樣, 電荷是電場的源, 有電荷密度才會產生電場, 也才會有感應的電位 :

$$\varrho\ \text{(電荷密度)}\quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{E}\ \text{(電場)}\quad\Longrightarrow\quad U\ \text{(電位)。}$$

我們引進特徵函數 (characteristic function) 或指示函數有時候也稱爲示性函數 (indicator function)

$$\mathbf{1}_{\Omega}(\boldsymbol{x})=\chi_{\Omega}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin\Omega,\end{cases} \tag{3.18}$$

然後將電荷密度 $\varrho(\boldsymbol{x})$ 刻意表示爲 (這是分析常用的手法!)

$$\varrho(\boldsymbol{x})=\varrho(\boldsymbol{x})\cdot 1=\varrho(\boldsymbol{x})\cdot\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}d\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}\varrho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{\xi}.$$

假設 ϱ 是連續則當 Ω 很小時 $\varrho(\boldsymbol{x})\approx\varrho(\boldsymbol{\xi})$ 因此

$$\varrho(\boldsymbol{x})\approx\frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega}\varrho(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\varrho(\boldsymbol{\xi})\frac{\mathbf{1}_{\Omega}(\boldsymbol{\xi})}{|\Omega|}d\boldsymbol{\xi}. \tag{3.19}$$

這裡的特徵函數是 (實) 分析非常重要的概念, 然而早就已經運用在物理學特別是電磁學上。此時將 Ω 收縮到 $\boldsymbol{x}$ 一個點並利用 (2.6)

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\varrho(\boldsymbol{\xi})\frac{\mathbf{1}_{\Omega}(\boldsymbol{\xi})}{|\Omega|}d\boldsymbol{\xi}\to\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\varrho(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}=\varrho(\boldsymbol{x}),\quad \text{當 } |\Omega|\to 0. \tag{3.20}$$

由此 Dirac δ-函數自然而然出現

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = \lim_{|\Omega|\to 0} \frac{\mathbf{1}_\Omega(\boldsymbol{\xi})}{|\Omega|} = \begin{cases} \infty, & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}, \\ 0, & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi}. \end{cases} \tag{3.21}$$

而且令 $\varrho = 1$ 得

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{|\Omega|}\iiint\limits_{\Omega} d\boldsymbol{\xi} = 1. \tag{3.22}$$

從此 (3.21)、(3.22) 就成爲 Dirac δ-函數的正式定義。而且由 (3.21), 將特徵函數 $\mathbf{1}_\Omega$ 視爲無量綱 (dimensionless), 可以再次確定 Dirac δ-函數的量綱 (與 (2.15) 比較)

$$[\delta] = \frac{[\mathbf{1}_\Omega]}{[|\Omega|]} = \frac{1}{\mathrm{L}^3} = \mathrm{L}^{-3}.$$

根據量綱關係並從上面電磁學的討論可以理解 Dirac δ-函數爲

$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$:　代表位於 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 的單位點電荷密度 (unit point charge density)[7]。

此時將 (3.20) 表示爲 Riemann 和 (Riemann sum)

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varrho(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{k=1}^{n} \varrho(\boldsymbol{\xi}_k)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k)(\triangle\xi_k)^3. \tag{3.23}$$

因爲 $(\triangle\xi_k)^3$ 是體積 (volume)

$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k)(\triangle\xi_k)^3$:　代表位於 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_k$ 的單位點電荷 (unit point charge),

再根據 ϱ 的定義

$\varrho(\boldsymbol{\xi}_k)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k)(\triangle\xi_k)^3$:　位於 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_k$ 的電荷密度 $\varrho(\boldsymbol{\xi}_k)$,

$\sum_{k=1}^{n} \varrho(\boldsymbol{\xi}_k)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k)(\triangle\xi_k)^3$:　所有位於 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_k$的電荷密度 $\varrho(\boldsymbol{\xi}_k)$ 的和,

$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varrho(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}$:　所有位於 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 的電荷密度 $\varrho(\boldsymbol{\xi})$ 的連續和。

由於 Dirac δ-函數的特性, $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 只在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}$ 取值, 它具有篩選的性質

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varrho(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \varrho(\boldsymbol{x}). \tag{3.24}$$

---

[7]有些書還有不少人將它詮釋爲單位點電荷少了密度, 從量綱分析的角度而言這不夠精確! 要這麼理解必須假設是在單位體積下才成立。

整個積分 (連續和) 只留下位於 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}$ 的電荷密度 $\varrho(\boldsymbol{x})$, 這就是 (2.6) 的物理詮釋。

4. Lagrange-Green 恆等式

『熱愛分析 (analysis) 的人會欣喜地發現, 力學已成爲分析學的一個分支, 並感激我拓展了分析的研究領域。』

— Joseph-Louis Lagrange (1736∼1813) —

格林函數的關鍵在格林第二等式 (2.4) 或 (2.14), 如果要做進一步的推廣就必須將 Laplace 算子 Δ 更換爲一般的線性微分算子 $\mathscr{L}$, 因此格林原來的問題 (2.1) 就推廣爲

$$\mathscr{L}u(x)=f(x)\quad\Longrightarrow\quad u=? \tag{4.1}$$

先假設 $\mathscr{L}^{-1}$ 存在並將之作用到 (4.1) 兩邊得

$$u(x)=\mathscr{L}^{-1}f(x)\overset{\text{def}}{=}\int G(x,\xi)f(\xi)d\xi; \tag{4.2}$$

此時 $\mathscr{L}^{-1}$ 是一個由積分核 $G(x,\xi)$ 所定義的積分算子。自然我們會問由 (4.2) 所給出的形式解 (formal solution) 真的是 (4.1) 的解嗎? 將 u 帶回 (4.1)

$$\mathscr{L}u(x)=\int\mathscr{L}G(x,\xi)f(\xi)d\xi=f(x). \tag{4.3}$$

再利用 Dirac δ-函數的性質 (2.6)

$$f(x)=(f*\delta)(x)=\int\delta(x-\xi)f(\xi)d\xi. \tag{4.4}$$

比較 (4.3)、(4.4) 推論 $G(x,\xi)$ 必須滿足

$$\mathscr{L}G(x,\xi)=\delta(x-\xi). \tag{4.5}$$

在特殊的情形, 如果 G 是卷積 (convolution); $G(x,\xi)=G(x-\xi)$ 則由 (4.2) 或 (4.5) 兩邊同乘 $f(\xi)$後積分

$$\mathscr{L}\Big[\int G(x-\xi)f(\xi)d\xi\Big]=\int\mathscr{L}G(x-\xi)f(\xi)d\xi=\int\delta(x-\xi)f(\xi)d\xi=f(x),$$

可結論

$$u(x)=\int G(x-\xi)f(\xi)d\xi=(G*f)(x), \tag{4.6}$$

將 (4.5)、(4.6) 合併可得對應關係

$$\mathscr{L}u=\delta(x-\xi)\quad\Longleftrightarrow\quad u(x)=G(x-\xi). \tag{4.7}$$

對線性算子 $\mathscr{L}$ 而言, 在 (單位) 點源 $\delta(x-\xi)$[8]作用下的輸出 (或點源響應) 就是格林函數

[8]Dirac δ-函數可以視爲單位點電荷密度, 則格林函數就是該電荷感應所產生的電位。

$G(x-\xi)$。接著將非齊次項 $f(x)$ 表示爲 Riemann 和 (Riemann sum)

$$f(x) = (f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi_k)\delta(x-\xi_k)\triangle\xi_k, \tag{4.8}$$

也就是把 $f(x)$ 表示爲所有在 $x=\xi_k$ 強度爲 $f(\xi_k)$ 之脈衝 (或點電荷) 的和, 現在將 (4.8) 的 $\delta(x-\xi_k)$ 取代爲格林函數 $G(x-\xi_k)$, 則系統所對應的解 (電位) 是

$$u(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi_k)G(x-\xi_k)\triangle\xi_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi)d\xi = f * G(x). \tag{4.9}$$

George Green 當初的想法就是: 若已知格林函數與源 (非齊次項) 分佈 (包括時間上與空間上), 則可通過格林函數與源 (非齊次項) 的卷積 (convolution) 得在此源 (非齊次項) 作用下系統的輸出 (或響應)。

> 『一個數學物理方程表示一種特定的場和產生這種場的源之間的關係 (例如熱傳導方程式表示溫度場和熱源的關係), 而格林函數則代表了一個點源 (Dirac δ-函數) 所產生的場。知道了一個點源的場, 就可以用疊加的方法 (Riemann sum) 算出任意源的場。』

註解:

(i) 格林函數的物理意義也可以從衝量 (impulse) 的角度來看。令 $\boldsymbol{J}$ 與 $\boldsymbol{F}$ 分別代表衝量與力, 按定義：衝量是力對時間的積累效應(積分!);

$$\boldsymbol{J} = \int \boldsymbol{F}dt, \qquad [\boldsymbol{J}] = [\boldsymbol{F}][t] = \mathrm{LMT}^{-1}; \tag{4.10}$$

簡單的量綱分析可知衝量 $\boldsymbol{J}$ 的量綱正好是動量 (momentum)。再根據牛頓第二運動定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{a}dt = m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dt \\ &= m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1); \end{aligned} \tag{4.11}$$

這裡 $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = d\boldsymbol{v}/dt$ 是加速度、$\boldsymbol{v}$ 是速度而 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 則是動量。力對質點的衝量, 使質點的動量發生變化, 而且衝量等於質點動量的變化量。若根據系統接受脈衝而產生動量變化效應來界定, 則在碰撞時間範圍內, 能使系統產生一個單位動量變化 (即 1kg-m/s), 即稱爲單位脈衝 (unit impulse)。

(ii) 當一個單位脈衝 (unit impulse) δ 通過系統, 系統的輸出就叫做脈衝響應 (impulse response), 簡而言之, 脈衝響應可以理解成「系統對單位脈衝的反應」, 所以 (4.7) 告訴我們

格林函數的物理意義是單位脈衝 (point impulse) 產生的場也就是脈衝響應。回到 (4.1) 可以將非齊次項 f 視爲系統的輸入, 格林函數 G 是系統的脈衝響應, 則 u 便是系統的輸出。至於 $u = G * f$ 可以寫成 G 跟 f 的卷積 (用 $*$ 符號來表示), 那是因爲原系統是平移不變, 一般而言並沒有這麼好的結果! □

我們考慮一般的非齊次二階線性偏微分方程 (二維)

$$\mathscr{L}u \stackrel{\text{def}}{=} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \phi; \tag{4.12}$$

這裡係數 $a = a(x,y), \ldots, f = f(x,y)$ 還有非齊次項 $\phi = \phi(x,y)$ 都是 x, y 的函數, 因爲是線性所以不會與 u 有關。仿 (2.12) 的計算, 利用 Leibniz 法則把所有 u 的偏導數統統搬到 v;

$$\begin{aligned} v(au_{xx}) &= avu_{xx} + (av)_x u_x - (av)_x u_x \\ &= (avu_x)_x - (av)_x u_x - (av)_{xx} u + (av)_{xx} u \\ &= [avu_x - (av)_x u]_x + (av)_{xx} u. \end{aligned} \tag{4.13a}$$

同理 (計算省略)

$$\begin{aligned} v(bu_{xy}) &= [bvu_y]_x - [(bv)_x u]_y + (bv)_{xy} u, \\ v(cu_{yy}) &= [cvu_y - (cv)_y u]_y + (cv)_{yy} u, \\ v(du_x) &= (dvu)_x - (dv)_x u, \\ v(eu_y) &= (evu)_y - (ev)_y u, \qquad v(fu) = (fv)u. \end{aligned} \tag{4.13b}$$

(4.13a)、(4.13b) 垂直相加整理之後就是 Lagrange 恆等式 (Lagrange identity)

$$v\mathscr{L}u - u\mathscr{L}^*v = J(u,v) = \operatorname{div}(P,Q) = P_x + Q_y, \tag{4.14}$$

其中 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的伴隨算子[9]

$$\mathscr{L}^*v \stackrel{\text{def}}{=} (av)_{xx} + 2(bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (dv)_x - (ev)_y + fv, \tag{4.15}$$

它的出現是因爲 u、v 角色互換自然導致的結果, 另外

$$\begin{aligned} P &= avu_x - (av)_x u + 2bvu_y + duv, \\ Q &= -2(bv)_x u + cvu_y - (cv)_y u + evu. \end{aligned} \tag{4.16}$$

[9] 伴隨算子 (adjoint operator) 有時也稱爲對偶算子 (dual operator) 或共軛算子 (conjugate operator), 是線性代數中矩陣的共軛轉置 (Hermite 轉置) 的推廣。也有人稱它爲 back projection 算子因爲沿著一個方向傳播的訊息會向後投射。

Lagrange 恆等式 (4.14) 的積分就是格林 (第二) 等式 (利用 Green 定理)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} v\mathscr{L}u\,dxdy &= \iint\limits_{\Omega} u\mathscr{L}^*v\,dxdy + \iint\limits_{\Omega} P_x - (-Q)_y\,dxdy \\ &= \iint\limits_{\Omega} u\mathscr{L}^*v\,dxdy + \oint\limits_{\partial\Omega} (-Q)dx + Pdy \\ &= \iint\limits_{\Omega} u\mathscr{L}^*v\,dxdy + \oint\limits_{\partial\Omega} (P,Q)\cdot \boldsymbol{n}ds,\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中 $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ 是弧長元素, 而 $\boldsymbol{n} = (dy/ds, -dx/ds)$ 則是單位朝外法向量。這是格林第二等式 (2.4) 的推廣, 是格林函數的起點。不僅如此, 先忽略 (4.17) 中邊界項的線積分 (例如, 齊次邊界條件!) 並引進內積 (inner product)

$$\langle f,g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\Omega} fg\,dxdy, \tag{4.18}$$

則 (4.17) 就是伴隨算子 (adjoint operator) 的抽象定義

$$\langle \mathscr{L}u, v\rangle = \langle u, \mathscr{L}^*v\rangle; \tag{4.19}$$

更精確地講滿足 (4.19) 的算子 $\mathscr{L}^*$ 只能稱爲形式伴隨 (formal adjoint), 因爲沒有包含邊界條件。透過積分 (也就是內積) 可以清楚 u、v 角色互換的本質就是《分部積分》(integration by part), 也就是說在實際操作時一個微分算子 $\mathscr{L}$ 可以藉由分部積分得相對應的伴隨算子 $\mathscr{L}^*$。由此可以看出格林的思想直接或間接影響了 20 世紀初泛函分析的創立, 尤其是根據內積所建立的希爾伯特空間 (Hilbert space)。除了第三節的廣義函數論之外還有算子理論與對偶空間 (dual space) 這些對於 (偏) 微分方程的研究都是不可或缺。其中對偶空間是理解原空間的重要工具, 在數學分析中如果在原來的空間的問題有困難, 則我們可以先將它轉化爲對偶空間的問題先處理, 而格林函數就是最典型的代表。

回到格林第二等式 (2.4) 並表示爲內積的形式 (就是弱解)

$$\langle u, \Delta v\rangle = \langle \Delta u, v\rangle + \iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}, \tag{4.20}$$

這等式有重要的推論：

(1) 透過內積 (4.20) 可以將格林的思想重新表述爲泛函的語言。實際上如果忽略邊界項, 則由 (4.20) 得

$$\langle \Delta u, v\rangle = \langle u, \Delta^* v\rangle = \langle u, \Delta v\rangle,$$

對所有在某個空間上的 u, v 都成立。換句話說, Δ 的形式伴隨算子就是它自己 $\Delta^* = \Delta$, 或者更一般的算子, $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*$, 我們稱這種算子爲自伴隨 (self-adjoint)。

(2) 對應於 Dirichlet 問題 (2.1), 選取 $v(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 滿足 (2.1) 的伴隨 Dirichlet 問題 (就是 (2.2), (2.8))

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.21}$$

則 (4.20) 就是格林表現公式 (2.7) (或 (2.9))

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\xi}) &= \langle u, \delta \rangle = \langle u, \Delta G \rangle = \langle \Delta u, G \rangle + \iint\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}} \\ &= \iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{x} + \iint\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x}) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

(3) 同理 Neumann 問題 (2.19) 的伴隨 Neumann 問題爲

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad \dfrac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.23}$$

則由 (4.20) 可得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\xi}) &= \langle u, \delta \rangle = \langle u, \Delta G \rangle = \langle \Delta u, G \rangle - \iint\limits_{\partial\Omega} G \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}} \\ &= \iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{x} - \iint\limits_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

於是我們再次推得 (2.20)。

(4) 有不少學生在學這一部分時誤以爲格林函數是直接將 Poisson 方程的非齊次項 $f(\boldsymbol{x})$ 換爲 Dirac δ-函數, 這是致命的錯誤, 沒有真正讀懂格林第二等式。會造成這個誤解那是因爲 Laplace 算子是自伴隨 (self-adjoint), $\Delta = \Delta^*$。另外, 雖然格林函數與基本解都滿足相同的微分方程, 但 (4.21) 或 (4.23) 告訴我們 (針對 Laplace 算子)

格林函數是滿足邊界條件的基本解!

反過來, 基本解可以重新詮釋爲全空間的格林函數。

5. 單層與雙層位勢

『我並非主張每個主題都應該深入探索。而是根據自身的天賦和興趣, 至少選擇一個主題進行深入研究。至於其他主題, 則應該效法蜜蜂, 從每朵花中吸取一滴花蜜。』

— Jacopo Francesco Riccati (1676~1754) —

格林關於位勢論 (potential theory) 的工作平行與高斯 (Carl Friedrich Gauss) 的成就。直接與位勢論對應的就是就是調和函數或 Laplace 方程, 也就是將 (2.1)、(2.19) 的非齊次項假設爲零, $f=0$。此時我們關心的是 Laplace 方程的 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

其解是

$$u(\boldsymbol{\xi}) = u_2(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} g(\boldsymbol{x}) dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{5.2}$$

這告訴我們一個 Ω 內之調和函數的 Dirichlet 問題完全由它的邊界值所決定。其次 Laplace 方程的 Neumann 問題

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = h(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

對應的解是

$$u(\boldsymbol{\xi}) = -u_3(\boldsymbol{\xi}) = -\iint_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{x}) dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{5.4}$$

與 Dirichlet 問題 (5.1) 不同的是 Neumann 邊界還必須滿足相容性條件

$$\iint_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x}) dS_{\boldsymbol{x}} = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} dS_{\boldsymbol{x}} = \iiint_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0, \tag{5.5}$$

正是 (2.21) 的特例。另外因爲方向導數 (微分!) 的緣故, 若 u 是 Neumann 問題 (5.3) 的解則 $u+c, c \in \mathbb{R}$ 也會是解! 這裡的曲面積分 u_2、u_3 特別稱爲雙 (極) 層位勢 (double layer potential) 與單 (極) 層位勢 (single layer potential)。雙層位勢是 Laplace 方程 Dirichlet 問題的解, 對應於三維空間中閉合曲面 $\partial\Omega$ 上偶極子分佈相關的靜電位勢或磁位勢。

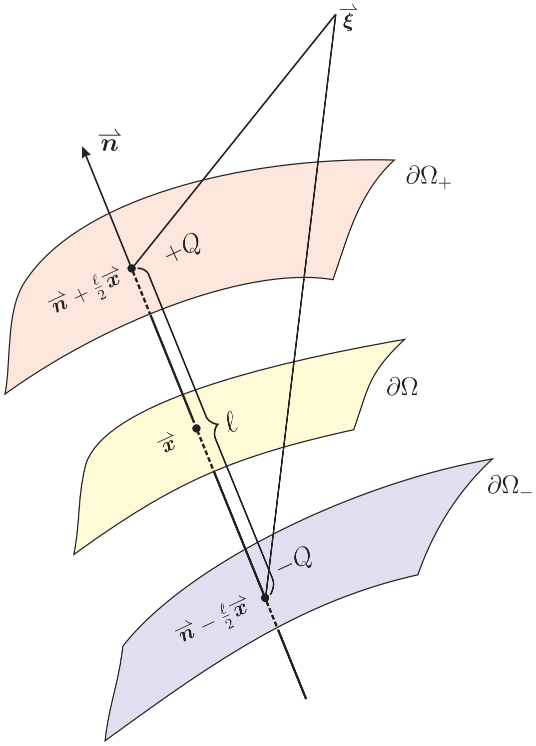


圖 3: 電偶極 (dipole) 與雙層位勢

註解:

(i) 從靜電學的角度而言：層電位 (layer potential) 直接對應就是曲面積分 (可以把 layer 想像成球殼!)

$$\text{層電位} \iff \text{曲面積分}$$

至於到底是單層或雙層就跟被積分函數 (integrand) 有關。對 u_3 而言被積分函數 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})h(\boldsymbol{x})$ 只在曲面 $\partial\Omega$ 取值, 這個曲面積分只有表面一層, 所以是單層位勢 (single layer potential)。而 u_2 中被積分函數的 (法向量) 方向導數可以視爲差分

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} \approx G(\boldsymbol{x}+t,\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \qquad \text{(沿著法向量 } \boldsymbol{n} \text{ 的差額)。} \tag{5.6}$$

這個 u_2 基本上是兩個曲面積分的相減

$$\begin{aligned} u_2(\boldsymbol{\xi}) &\approx \iint_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}+t,\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}} - \iint_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}} \\ &= \iint_{\partial\Omega_t - \partial\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}} \approx \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} g(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

此時可見表面是兩層的差額: $\partial\Omega_t - \partial\Omega$, 也就是 u_2 是兩個單層位勢 (兩個曲面積分) 的差額, 正因爲如此我們稱 u_2 是雙層位勢。

(ii) 雙層位勢最恰當的解釋應該從電學的角度來看。首先電偶極 (dipole) 是兩個分隔一段距離, 電量相等, 正負相反的電荷。而所謂雙 (極) 層 (double layer) 是指由兩層正與負電荷所構成, 其曲面 (表面) 密度爲 σ, 兩層之間隔距爲 ℓ, 兩層之電荷則爲 $+Q = \frac{\sigma}{\ell}$ 與 $-Q = -\frac{\sigma}{\ell}$, 它們 (電荷) 會產生一定的場。當 $\ell \to 0$ 時就稱爲偶極場 (dipole field), 而對應的位勢 (potential) 則稱爲偶極位勢 (dipole potential), 我們利用格林函數 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 根據均值定理計算偶極位勢

$$G\Bigg(\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{x} + \frac{\ell}{2})\Bigg)\frac{\sigma}{\ell} - G\Bigg(\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{x} - \frac{\ell}{2})\Bigg)\frac{\sigma}{\ell} \to \sigma\frac{\partial G(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}, \qquad \ell \to 0. \tag{5.8}$$

如此我們找到了位於某個變動的點 $\boldsymbol{x}$ 處的偶極子所形成的雙層位勢, 那麼全部的點 $\boldsymbol{x}$ 收集起來並將密度 σ 由常數推廣爲函數 $g(\boldsymbol{x})$ 就是在 $\boldsymbol{\xi}$ 的雙層位勢 (參考圖三)

$$u_2(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} g(\boldsymbol{x}) dS_{\boldsymbol{x}}.$$

(iii) 如果 $\Omega = B_R$ 是半徑等於 R 的球或上 (下) 半空間, 則雙層位勢 (5.2) 就是 Poisson 積分公式, 而積分核 $\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}}$ 則是 Poisson 核, 此時可以利用對稱點建構格林函數, 還有根據區域的特殊性, 精確地計算格林函數在邊界的法向導數, 詳細可參考偏微分方程的專著 [9, 20]。 □

例題5.1: (**單層位勢**) 證明均勻質量分布之球面位能 (spherical surface potential) 爲

$$U(\xi, \eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{\sigma dS}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} = \begin{cases} \dfrac{M}{R}, & 0 \le a \le R, \\[2ex] \dfrac{M}{a}, & a \ge R, \end{cases} \tag{5.9}$$

其中 $a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ 是球面 $\partial B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ 的 (均勻) 密度, 而 $M = 4\pi R^2 \sigma$ 則是球面的質量。

解: 這個積分經過旋轉不變, 所以透過對稱性可以將 (ξ, η, ζ) 旋轉到 z-軸的 $(0, 0, a)$

$$U(\xi, \eta, \zeta) = U(0, 0, a) = \iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{\sigma dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}.$$

由於積分區域的特性自然引進球面座標

$$\boldsymbol{x}(\varphi, \theta) = (x, y, z) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi),$$

其高低角與水平角範圍是 $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$。直接計算得

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2,$$

還有曲面元素 (即球面上由兩條經線與兩條緯線所圍之區域: 參考圖四)

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right| d\varphi d\theta = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\theta = R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta,$$

其中

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = R^2, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = 0, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = R^2 \sin^2\varphi.$$

原積分等於

$$\begin{aligned}
U(0,0,a) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma R^2 \sin\varphi}{\sqrt{R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2}} d\varphi d\theta \\
&= 2\pi\sigma R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2 - 2Ra\cos\varphi + a^2}} d\varphi \\
&= 2\pi\sigma R^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Rat}} dt \qquad\qquad (t = -\cos\varphi) \\
&= 2\pi\sigma \frac{R}{a}\Big(\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra} - \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra}\Big) \\
&= 2\pi\sigma \frac{R}{a}\Big(|R+a| - |R-a|\Big).
\end{aligned}$$

因此得

$$U(0,0,a) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{\sigma dS}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \begin{cases} \dfrac{M}{R}, & 0 < a < R, \\ \dfrac{M}{a}, & a \geq R. \end{cases}$$

如果 $a = 0$, 則

$$U(0,0,0) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} \frac{\sigma dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\varphi}{R} d\varphi d\theta = 4\pi R\sigma.$$

這個積分可以直接看出來 (利用 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$)

$$U(0,0,0) = \frac{\sigma}{R}|\partial B_R| = \frac{\sigma}{R}|\mathbb{S}^2(R)| = \frac{\sigma}{R}4\pi R^2 = \frac{M}{R}. \qquad \square$$

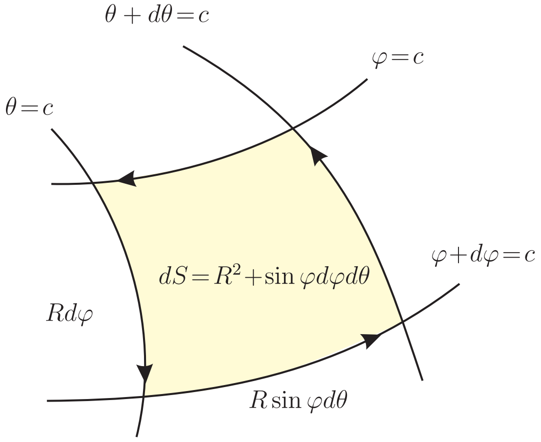


圖 4: 球面上之曲面元素

6. 牛頓位 (Newtonian potential)

『若要將舊時代的眞理留在人心, 必須以這個時代的語言及概念重新敘述。』

— 海耶克 (Friedrich Hayek, 1899∼1992) —

重力位勢 (gravitational potential) 理論及其在靜電學、電磁學和聲波理論的推廣與應用, 爲數學分析的力量提供了很好的例證。先回顧牛頓的萬有引力定律 : 每一點質量都是通過指向沿著兩點相交線的力量來吸引每一個其它點的質量。力與兩個質量的乘積成正比, 與它們之間的距離平方成反比

$$F_1 = \frac{\mathrm{G}mM}{r^2}, \tag{6.1}$$

其中 G 爲萬有引力常數又稱重力常數, 也就是說, 不論 m、M、r 爲何, G 都是固定的! 按 MKS 制其值大約是

$$\mathrm{G} \approx 6.674 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}, \tag{6.2}$$

而其量綱 (dimension) 爲 $[\mathrm{G}] = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$。假設這兩點是 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 其質量分別等於 m、M, 而距離 $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ 則向量形式的萬有引力定律爲

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = -F_1\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} = -\frac{\mathrm{G}mM}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}; \tag{6.3}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 表示質量 M 在位置 $\boldsymbol{x}$ 的質點所受到的萬有引力。負號是由於位移是由 (固定點) $\boldsymbol{\xi}$ 移動到 $\boldsymbol{x}$, 而萬有引力是吸引力方向與位移相反。類似於電場 (3.1), 質量在萬有引力理論可比擬爲

電荷在電磁學中扮演的角色。直接與重力 (萬有引力) 對應的就是重力場 (重力場強度), 是用於描述在任意空間內某一點 $\boldsymbol{x}$ 的物體每單位質量所受萬有引力的向量場 :

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{F}_1}{M} = -\mathrm{G}m\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}, \qquad [\boldsymbol{g}_1] = \frac{[\boldsymbol{F}_1]}{[M]}. \tag{6.4}$$

重力場的單位爲力除以質量的單位, 基本上可以將重力場視爲重力加速度。重力場是一個保守力場也就是存在純量函數 U_1 滿足

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) = -\nabla U_1(\boldsymbol{x}) \quad \Longrightarrow \quad U_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathrm{G}m}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{6.5}$$

把 $\boldsymbol{\xi}$ 視爲質量爲 m 的源點 (source point) 則 $U_1(\boldsymbol{x})$ 就是在 $\boldsymbol{x}$ 處的重力位 (勢)[10]。容易證明除了 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 之外 U_1 滿足 Laplace 方程

$$\Delta U_1 = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} = 0, \tag{6.6}$$

也就是說除了 $\boldsymbol{\xi}$ 之外 U_1 是一個調和函數 (harmonic function)。如果有 n 個不同質量爲 m_k 的質點位於 $\boldsymbol{\xi}_k$, 則利用重疊原理將各點都加起來得

$$\boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x}) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{G}m_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k|^3} \quad \Longrightarrow \quad U_n(\boldsymbol{x}) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{G}m_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_k|}. \tag{6.7}$$

若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi}_k$, 這個函數仍然滿足 (6.6)。如果質量分布是連續的則 (無窮) 級數可以轉化爲積分

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) &= -\mathrm{G}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}dm(\boldsymbol{\xi}) = -\mathrm{G}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\varrho(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}d\boldsymbol{\xi},\\ U(\boldsymbol{x}) &= -\mathrm{G}\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}dm(\boldsymbol{\xi}) = -\mathrm{G}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\varrho(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

此時密度函數 $\varrho(\boldsymbol{\xi}) = m'(\boldsymbol{\xi})$ 自然出現。在數學上, 重力位 (gravitational potential) 也稱爲牛頓位 (Newtonian potential), 是位勢理論 (potential theory) 的基礎, 與離散的情形 (6.7) 不同的是, 由 (6.8) 所給定的牛頓位U並不滿足 Laplace 方程 (6.9), 而是 Poisson 方程

$$\Delta U = 4\pi\mathrm{G}\varrho. \tag{6.9}$$

但是要證明 (6.9) 並不是那麼明顯, 這裡面牽涉不少數學分析的技巧是本節想要闡明的。我們先計算一個 (6.8) 的特例, 如果你對於這個著名的三重積分有困難, 不要氣餒, 因爲它是一個牛頓位。如果我教多變數微積分或向量分析, 一定要求學生會做這個積分, 並且要求解釋它的物理意義, 因爲這是微積分的基本素養!

[10]在古典力學中, 在某個位置上的重力位 (勢) 等於將單位質量的質點從零位面移動到該位置所做的功。

例題6.1: 已知 $\sigma \in \mathbb{R}^+$ 是半徑等於 R 之實心圓球的密度, 則

$$U(0,0,a) \stackrel{\text{def}}{=} \iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{a^2}{2R^2}\right)\dfrac{M_R}{R}, & 0 \le a < R, \\ \dfrac{M_R}{a}, & a \ge R, \end{cases} \tag{6.10}$$

其中 $M_R = \sigma\frac{4\pi R^3}{3}$ 是圓球 B_R 的質量。

解法一: (**球座標**) 由於積分區域的特性自然引進球座標

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

其範圍是

$$0 \le \rho \le R, \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

則 (餘弦定律)

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = \rho^2 - 2\rho a\cos\varphi + a^2,$$

還有體積元素

$$dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}d\rho d\varphi d\theta = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

原積分等於

$$\begin{aligned} U(0,0,a) &= \sigma\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-2\rho a\cos\varphi+a^2}}d\rho d\varphi d\theta \\ &= \sigma\int_0^R \rho^2 d\rho\int_0^{\pi}\frac{2\pi\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2-2\rho a\cos\varphi+a^2}}d\varphi \\ &= 2\pi\sigma\int_0^R\rho^2 d\rho\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2+2\rho at}}dt \qquad (t = -\cos\varphi) \\ &= 2\pi\sigma\int_0^R\frac{\rho}{a}\left(\sqrt{\rho^2+a^2+2\rho a} - \sqrt{\rho^2+a^2-2\rho a}\right)d\rho \\ &= 2\pi\sigma\int_0^R\frac{\rho}{a}\Big(\rho + a - |\rho - a|\Big)d\rho. \end{aligned}$$

因此

$$\iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \begin{cases} 2\pi\sigma\left(R^2 - \dfrac{a^2}{3}\right), & 0 \le a < R, \\ \dfrac{4\pi\sigma R^3}{3a}, & a \ge R. \end{cases}$$

整理之後就是 (6.10)。如果 $a=0$, 則

$$U(0,0,0)=\iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\sigma\rho^2\sin\varphi}{\rho}d\rho d\varphi d\theta=2\pi R^2\sigma=\frac{3}{2}\frac{M_R}{R}.$$

因爲被積分函數只與半徑有關, 根據球體積等於球表面積沿著半徑積分

$$dxdydz=dV_3(\rho)=V_3'(\rho)d\rho=\mathbb{S}^2(\rho)d\rho=\mathbb{S}^2(1)\rho^2d\rho=4\pi\rho^2d\rho,$$

利用上式這個積分可以由球的對稱性化爲一維的積分而得

$$U(0,0,0)=\iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sigma\int_0^R\frac{1}{\rho}4\pi\rho^2d\rho=2\pi R^2\sigma.$$

解法二: (**圓柱座標**) 由於被積分函數出現 x^2+y^2, 自然可以考慮圓柱座標

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad z=z,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

其範圍是

$$0\le r\le\sqrt{R^2-z^2},\qquad 0\le\theta\le 2\pi,\qquad -R\le z\le R.$$

計算得圓柱座標與直角座標的體積關係 (Jacobian)

$$dxdydz=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}drd\theta dz=rdrd\theta dz,$$

所以原積分等於

$$U(0,0,a)=\sigma\int_{-R}^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}rdrd\theta dz$$

$$=\sigma 2\pi\int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}rdrdz$$

$$=\sigma\pi\int_{-R}^{R}\int_0^{R^2-z^2}\frac{1}{\sqrt{t+(z-a)^2}}dtdz\qquad (t=r^2)$$

$$=\sigma 2\pi\int_{-R}^{R}\Big(\sqrt{R^2-z^2+(z-a)^2}-|z-a|\Big)dz$$

$$=\sigma 2\pi\int_{-R}^{R}\Big(\sqrt{R^2+a^2-2az}-|z-a|\Big)dz.$$

這個積分必須分成兩個情形討論：$0 \le a < R, a \ge R$, 因此

$$\iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{a^2}{2R^2}\right)\dfrac{M_R}{R}, & 0\le a<R, \\ \dfrac{M_R}{a}, & a \ge R. \end{cases} \qquad \square$$

註解:

(i) 假設 σ 是無量綱, $[\sigma]=1$ 則簡單的量綱分析可以判斷 (6.10) 這個等式是量綱平衡, 還有積分的存在性：$[x]=[y]=[z]=[R]=[a]=\mathrm{L}$,

$$[2\pi\sigma R^2] = \left[\frac{2\pi\sigma}{3}a^2\right] = \left[\frac{4\pi\sigma R^3}{3a}\right] = [U] = \frac{1}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^3 = \mathrm{L}^2 \to 0 \qquad \mathrm{L}\to 0.$$

(ii) 做個旋轉 (6.10) 這個積分仍然不變：$(a=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})$

$$U(\xi,\eta,\zeta) = \iiint\limits_{0\le x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{\sigma dxdydz}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{6.11}$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{a^2}{2R^2}\right)\dfrac{M_R}{R}, & 0\le a<R, \\ \dfrac{M_R}{a}, & a \ge R. \end{cases} \qquad \square$$

定義 6.2: 已知 f 是 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 的可積函數, 則 f 的牛頓位 (Newtonian potential) 是

$$u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Omega} \Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}, \tag{6.12}$$

其中 $\Gamma_n(\boldsymbol{x})$ 是 Laplace 方程的基本解：$\Delta\Gamma_n = \delta(\boldsymbol{x})$

$$\Gamma_n(\boldsymbol{x}) = \Gamma_n(|\boldsymbol{x}|) = \begin{cases} \dfrac{|\boldsymbol{x}|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & n\ge 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|\boldsymbol{x}|, & n=2, \end{cases} \tag{6.13}$$

其中 ω_n 是單位球表面積。$n=2$ 時我們把 $u(\boldsymbol{x})$ 稱爲對數位 (logarithmic potential)。

註解:

(i) 由 Green 第一等式, 也就是 (2.12) 積分 (令 $v=u$ 並忽略邊界項!)

$$\langle\Delta u, u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x} \le 0 \quad\Longrightarrow\quad \Delta \le 0.$$

由 (3.17) 與 (6.9) 可知正、負類型的 Poisson 方程都是可能的。但是若想定義非整數階的 Laplace 算子則必須考慮 $-\Delta$, 例如

$$\sqrt{-\Delta}, \qquad ,\sqrt{-\Delta+m^2}, \qquad (-\Delta)^{\alpha}.$$

也因爲這個緣故, 有不少偏向物理的書籍與文獻所考慮的 Poisson 方程不是 (2.1) 而是帶有負號

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.14}$$

此時基本解與 (6.13) 的 $\Gamma(\boldsymbol{x})$ 只差一個負號。讀者在閱讀時要能夠分辨這中間的差異!

(ii) 不嚴格的論證可以推得牛頓位 (6.12) 滿足 Poisson 方程

$$\Delta u = \int_{\Omega} \Delta\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = f(\boldsymbol{x}).$$

但是就算 f 是連續的, 牛頓位 u 也不見得是二次可微! 因爲積分

$$\int_{\Omega} \Delta\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \tag{6.15}$$

不見得收斂。這裡我給一個量綱的理由： 假設 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一個有界區域且 $f \in C(\Omega)$, 基本上 f 是一個有界函數因此可以視爲常數。以量綱的語言, 這相當於 f 是無量綱 (dimensionless)

$$f \in C(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad [f] = 1.$$

(6.15) 這個積分是無量綱

$$\left[\int_{\Omega} \Delta\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}\right] = \frac{[\Gamma_n]}{\mathrm{L}^2}[1]\mathrm{L}^n = \frac{\mathrm{L}^{2-n}}{\mathrm{L}^2}\mathrm{L}^n = 1,$$

所以無法判斷積分是否收斂! 但是 Ω 是有界區域, 要得到一個收斂的積分, 其量綱勢必要增加, 也就是要提高 f 的平 (光) 滑性。由於只需要增加些微的量綱即可, 於是最自然的空間是 Hölder 空間

$$f \in C^{\alpha}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \le C|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}, \qquad 0 \le \alpha < 1; \tag{6.16}$$

C 是一個常數可以把它當無量綱, 根據 (6.16) 的不等式可得 f 之量綱

$$f \in C^{\alpha}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad [f] = \mathrm{L}^{\alpha}.$$

在 Hölder 連續 (6.16) 這個條件下積分 (6.15) 就會收斂

$$\left[\int_\Omega \Delta\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}\right] = \mathrm{L}^\alpha \to 0, \qquad \mathrm{L}\to 0.$$

這才是 Hölder 空間被引進來研究 (橢圓) 偏微分方程之背後的量綱理由。

(iii) 關於牛頓位與 Poisson 方程及其 C^α-正則性 (regularity), 有興趣的讀者可以好好研讀 Gilbarg-Trudinger [9] 的第四章。這一章可以說是本書的核心! 一旦掌握了具體的 Poisson 方程, 你就知道如何藉由連續法 (method of continuity), 推廣到一般的橢圓 (偏微分) 方程及其相關的 Hölder 估計。 □

最後我們證明牛頓位滿足 Poisson 方程, 基於《回到格林》之信念在此只考慮三維的情形。

定理 6.3: 已知 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 而且 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是一有界區域, $f\in C^1(\Omega)$, 則牛頓位

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}, \qquad d\boldsymbol{\xi}=d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{6.17}$$

滿足 Poisson 方程

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{6.18}$$

證明: 一如既往, 我們只需指出證明的核心想法, 細節就留給有興趣的讀者。基本上分成底下幾點：

(1) 牛頓位 u 是連續。這相當於

$$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x} \quad\Longrightarrow\quad u(\boldsymbol{x}_n)\to u(\boldsymbol{x}).$$

但是 u 是一個積分, 所以就等價於積分與極限順序交換的問題,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi} \overset{??}{=} \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \lim_{n\to\infty}\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi},$$

正是高等微積分或數學分析的核心主題。雖然 $\boldsymbol{x}$ 是一個奇異點但 $f(\boldsymbol{\xi})$ 是有界 (視爲無量綱!), 所以被積分函數 $\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ 是可積

$$\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}\right] = \frac{1}{\mathrm{L}}\mathrm{L}^3 = \mathrm{L}^2\to 0, \qquad \mathrm{L}\to 0,$$

而且 $\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{\xi}|} \to \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ 一致收斂, 所以跟據一致收斂定理得 $\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ 也是可積而且

$$\lim_{n\to\infty} u(\boldsymbol{x}_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi} = u(\boldsymbol{x}).$$

(2) 牛頓位 u 是一次可微。與 (1) 的討論幾乎是一模一樣, 只是問題變成積分與微分順序是否可以交換? 直接取偏導數 $(i=1,2,3)$

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})\frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}d\boldsymbol{\xi}. \quad (6.19)$$

同樣透過量綱分析將 f 視爲無量綱, 可推論一階偏導數是可積

$$\left[\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})\frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}d\boldsymbol{\xi}\right] = 1\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}^3}\mathrm{L}^3 = \mathrm{L} \to 0, \qquad \mathrm{L}\to 0.$$

再一次藉由一致收斂定理結論 u 是一次可微。

(3) Laplace 方程(非奇異點)。假設場點 (field point) $\boldsymbol{x}\notin\Omega$ 是一個非奇異點

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}| \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\neq\infty \quad\Longrightarrow\quad \Delta\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)=0.$$

此時 u 滿足 Laplace 方程

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})\Delta_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} = 0. \quad (6.20)$$

(4) Poisson 方程 (奇異點)。仿定義 6.2 註解 (ii) 之討論, 由於 u 是無量綱造成二階偏導數可能是沒有定義的緣由, 實際上可以由 (6.19) 直接計算得 $(i=1,2,3)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} - \frac{3(x_i-\xi_i)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^5}\right)d\boldsymbol{\xi}. \quad (6.21)$$

把 f 視爲常數, 則由球座標 (參考例題 6.1) 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \approx \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{3(x_i-\xi_i)^2}{\rho^5}\right)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

由於 Ω 是有界區域, 當 $\rho=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|=0$ 時這個積分是沒有定義的 (undefined)! 之所以沒有定義, 並不是二階偏導數是無量綱, 而是 (6.21) 的被積分函數出現 $\infty-\infty$ 這種不定型, 因此*cancelation* 很有可能會出現。這個現象如果沒有真的去計算是看不出來的, 剛剛離開我們的偉大數值計算與應用數學家 (我的師公) Peter Lax (1926~2025, Courant

Institute, NYU, USA) 就曾說：不要輕視計算, 而是要在計算過程中看出規律。$\boldsymbol{x}$ 是一個奇異點 (singularity), 要避開當然是將該點挖掉而且要挖得漂亮, 自然是以 $\boldsymbol{x}$ 爲球心 ϵ 爲半徑的球, $B_\epsilon(\boldsymbol{x})$。新的區域爲 $\Omega_\epsilon = \Omega - B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ 則 (6.17) 可拆解爲兩部分

$$u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}d\boldsymbol{\xi}. \tag{6.22}$$

取偏導數得 $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi}\\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

這裡我們利用關係式 (這一步是相當關鍵)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right), \tag{6.24}$$

然後加一項減一項將 (6.23) 的第二個積分配成全微分 (由於 f 是可微!)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = &-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}d\boldsymbol{\xi}\\ &+ \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi}.\end{aligned} \tag{6.25}$$

上式 (6.25) 右邊第三個積分可以藉由分部積分 (實際上就是散度定理) 來計算。首先引進是標準基底 $\boldsymbol{e}_i \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 並刻意將被積分函數表示爲散度 (divergence)

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} &= \iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\boldsymbol{e}_i\right)d\boldsymbol{\xi}\\ &= \iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\cos\theta_i dS,\end{aligned} \tag{6.26}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂B_ϵ 的單位朝外法向量, θ_i 是 $\boldsymbol{n}$ 與 $\boldsymbol{e}_i$ 之夾角。所以 (6.25) 改寫爲

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}d\boldsymbol{\xi}\\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\cos\theta_i dS.\end{aligned} \tag{6.27}$$

同理二階偏導數爲 (再次將 (6.24) 作用到第二與第三個積分)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}d\boldsymbol{\xi}\\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)\cos\theta_i dS\\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}d\boldsymbol{\xi}\\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi})\frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\cos\theta_i dS.\end{aligned} \tag{6.28}$$

(6.28) 對 i 取和並利用 $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ 在 Ω_ϵ 內是一個調和函數得

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega_\epsilon} f(\boldsymbol{\xi})\Delta_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} + I_1 - I_2 = I_1 - I_2\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}d\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi})\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-\xi_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\cos\theta_i dS.\end{aligned} \tag{6.29}$$

先處理第一個體積分 I_1, 因爲 B_ϵ 是有界區域而且 f是一次可微, 令

$$M = \max_{i=1,2,3}\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}\right|, \qquad \boldsymbol{\xi}\in B_\epsilon(\boldsymbol{x}),$$

並利用球座標可得 I_1 的估計

$$|I_1| \le \frac{3M}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}d\boldsymbol{\xi} = \frac{3M}{4\pi}\int_0^\epsilon \frac{1}{\rho^2}4\pi\rho^2 d\rho = 3M\epsilon \to 0, \qquad \epsilon\to 0.$$

由此推論 $I_1 = 0$。其次, $\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})$ 是以 $\boldsymbol{x}$ 爲球心 ϵ 爲半徑的球面, 單位朝外法向量爲

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|} \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\xi_i - x_i}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} \cos^2\theta_i = 1,$$

所以第二個曲面積分爲

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} \sum_{i=1}^{3} \cos^2\theta_i dS = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi}) dS.$$

這等式對所有 $\epsilon > 0$ 都成立, 所以根據平均值定理得 (這裡只須要求 f 是連續!)

$$I_2 = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint\limits_{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{\xi}) dS = -f(\boldsymbol{x}). \tag{6.30}$$

代入 (6.29) 我們就證明了由 (6.17) 所定義的牛頓位 u 滿足 Poisson 方程 (6.18)。 □

註解:

(i) 這個定理只要求非齊次項 $f \in C^1(\Omega)$, 爲什麼 ? 這要從證明的過程仔細推敲, 關鍵步驟在 (6.23)–(6.25)

$$f \in C^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{分部積分(散度定理)。}$$

也就是透過分部積分 (integration by part), 把對 $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$ 的微分換成對 f 的微分! 也是因爲分部積分與 (6.24) 對稱性這個動作, 使得 u 的二階偏導數 (6.28) 對 f 的要求, 只需一次可微即可。

(ii) 如果 $f \in C_0^\infty(\Omega)$, 即 $f(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega^c$ 則牛頓位可以表示爲卷積 (convolution)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \Gamma_3 * f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

卷積是定義在全空間的。再一次藉由一致收斂定理變換積分與微分順序, 對 u 的所有偏微分統統搬到 f 上

$$D_{\boldsymbol{x}}^k u(\boldsymbol{x}) = \Gamma_3 * D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\boldsymbol{y}|} D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{6.32}$$

所以 $u\in C^\infty(\Omega)$。類似於 (6.24) 可得關係式

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{6.33}$$

因此

$$\Delta u=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

然後仿 (6.22) 拆成兩部分

$$\Delta u=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon^c(\mathbf{0})}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\overset{\text{def}}{=}-I_\epsilon-I_\epsilon^c. \tag{6.34}$$

因爲 $f\in C^2(\Omega)$, I_ϵ 可以估計如下

$$\begin{aligned}|I_\epsilon|&\le\max_{\boldsymbol{x}\in B_\epsilon(\mathbf{0})}|\Delta f|\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}d\boldsymbol{y}=\max_{\boldsymbol{x}\in B_\epsilon(\mathbf{0})}|\Delta f|\frac{1}{4\pi}\int_0^\epsilon\frac{1}{r}4\pi r^2dr\\&=\frac{\epsilon^2}{2}\max_{\boldsymbol{x}\in B_\epsilon(\mathbf{0})}|\Delta f|\to 0\qquad \epsilon\to 0.\end{aligned}$$

I_ϵ^c 的估計由於有二次微分, 與 (6.28)–(6.29) 不同的是分部積分一次不夠! 此時我們需要格林第二等式 (2.4)

$$\begin{aligned}I_\epsilon^c=&\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B_\epsilon^c(\mathbf{0})}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{y}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\right)d\boldsymbol{y}\\&+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon^c(\mathbf{0})}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\right)dS.\end{aligned} \tag{6.35}$$

因爲 $\boldsymbol{y}\neq 0$, $\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}$ 在 $B_\epsilon^c(\mathbf{0})$ 是一個調和函數而且 $B_\epsilon^c(\mathbf{0})$ 與 $B_\epsilon(\mathbf{0})$ 有相同的邊界但方向相反, 因爲 $B_\epsilon^c(\mathbf{0})$ 的朝外法向量正是 $B_\epsilon(\mathbf{0})$ 的朝內法向量。因此積分區域 $\partial B_\epsilon^c(\mathbf{0})$ 可以轉換爲 $\partial B_\epsilon(\mathbf{0})$:

$$\begin{aligned}I_\epsilon^c&=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\right)dS\\&=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)dS\\&=-\frac{1}{4\pi\epsilon}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{\partial}{\partial r}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS-\frac{1}{4\pi\epsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS.\end{aligned} \tag{6.36}$$

這兩個曲面積分估計如下

$$\left|-\frac{1}{4\pi\epsilon}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}\frac{\partial}{\partial r}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS\right|\le \max|\nabla f|\frac{1}{4\pi\epsilon}4\pi\epsilon^2=\epsilon\max|\nabla f|\to 0,\qquad \epsilon\to 0.$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\epsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS=f(\boldsymbol{x}).$$

因此由 (6.34) 得證牛頓位 u 滿足 Poisson 方程

$$\lim_{\epsilon\to 0}I_\epsilon^c=-f(\boldsymbol{x})\quad\Longrightarrow\quad \Delta u=f.$$

(iii) 關係式 (6.32) 只告訴我們 $u\in C^\infty(\Omega)$, 但無法確定 $u\overset{?}{\in}C_0^\infty(\Omega)$, 這問題出在卷積!

$$\operatorname{supp}(f*g)=\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g),\tag{6.37}$$

其中 $\operatorname{supp}(f)$ 是函數 f 的支撐集 (support)

$$\operatorname{supp}(f)=\overline{\{\boldsymbol{x}\in\Omega|f(\boldsymbol{x})\neq 0\}}.$$

因爲 (6.37) 我們無法結論函數 $u=\Gamma_3*f$ 在 Ω 的邊界與外部等於 0。讀者如果對澳大利亞旅遊有興趣, 可以將支撐集想像成著名的景點號稱世界中心的烏魯魯 (Uluru) 或稱愛爾斯岩 (Ayers Rock), 或者更一般的舞台、司令臺, 也就是高於水平面的部分。另外 (6.37) 的證明不難讀懂, 但我相信絕大多數的學生看不出其奧秘, 尤其右邊是兩個集合的相加與平時認知的交集或聯集有相當距離。卷積的內在本質是平移, 因此兩個函數卷積的支撐集是個別函數支撐集的和, 所以 (6.37) 右邊的加 (+) 的意義就是《平移》! 一個物理系統如果是平移不變那麼它的解必定是以卷積的形式表現出來, 這也是 Poisson 方程的解牛頓位是非齊次項與基本解的卷積之根本原因。 □

由 (6.17) 所給定的牛頓位並不滿足 Dirichlet 或 Neumann 邊界條件! 真正要處理 Poisson 方程的邊界值問題 (boundary value problem) (2.1) 或 (2.19), 第一步就是引進格林函數 (Green function)

定義 6.4: Laplace 算子 Δ 的格林函數定義爲

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})+w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\tag{6.38}$$

其中 $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 是一個調和函數, $\Delta w=0$。

第一次在 Gilbarg-Trudinger [9] 看到這個定義只能說： 丈二金剛(和尚) 摸不著頭腦, 感到困惑、無法理解。當學生的時候缺少批判精神, 不會質疑作者。當老師之後, 我會鼓勵學生:

數學讀不懂時不要先否定自己, 很有可能是你看的、書寫的不清不楚甚至是寫 (抄) 錯了! 我現在很有把握地說 [9] 這本名著對於格林函數的體會沒有那麼深刻, 由於格林函數是針對線性微分方程, 並不是這本書最關心的主題。坦白而言, 格林函數這麼定義是非常不負責任, 它要這麼看: 將 Laplace 算子作用到 (6.38) 兩邊得

$$\Delta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \Delta\Gamma_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) + \Delta w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}). \tag{6.39}$$

也就是說格林函數 G 由兩部分組成：基本解 Γ_n 是特解 (particular solution), 而調和函數 w 則是齊次解 (homogeneous solution)。從靜電學來看格林函數的第一項 Γ_n 是自由 (全) 空間中點電荷的電位, 而第二項 w 則代表導電表面上感應電荷所產生的電位。因此, 格林函數的構造可由感應電位 w 的決定來得出, 格林函數並不是抽象的存在, 而是要實實在在地把它構造出來。

格林函數的定義並沒有限定在 $n=2,3$, 這是格林的創見, 雖然如此我們只討論三維的情形。有了格林函數就可以將 (6.17) 的牛頓位替換爲

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \iiint\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} + w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right)f(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}. \tag{6.40}$$

利用 (6.39) 容易證明由 (6.40) 定義的 u_1 仍然滿足 Poisson 方程 (6.18), 所以是解決邊界值問題的首選。因此最後的問題是如何把這個調和函數 $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 造出來? 那要看你問的邊界問題而定, 通常是底下兩種:

1. Dirichlet 問題：對每一個固定的 $\boldsymbol{\xi}\in\Omega$, 格林函數 G 除了滿足微分方程 (6.39) 之外還有齊次 Dirichlet 邊界條件 (參考 (2.1), (2.9), (4.21), (4.22))

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} + w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega. \tag{6.41}$$

換句話說 w 滿足

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \quad \Delta w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega, \\ \text{(B.C.)} \quad w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.42}$$

決定了 w 之後, 利用這個格林函數 G, 根據 Green 第二等式 (2.5), 得 Dirichlet 問題 (2.1) 的解

$$u(\boldsymbol{\xi}) = u_1(\boldsymbol{\xi}) + u_2(\boldsymbol{\xi}) = \iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{x} + \iint\limits_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial\boldsymbol{n}}dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{6.43}$$

2. Neumann 問題：仿剛剛的討論此時格林函數 G 還需滿足齊次 Neumann 邊界條件 (參考 (2.19), (2.20), (4.23), (4.24))

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right) + \frac{\partial w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{6.44}$$

因此 w 滿足

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} & \Delta w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \text{(B.C.)} & \dfrac{\partial w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right), \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.45}$$

得到 w 之後, 也就是得到格林函數 G, 再由 Green 第二等式 (2.5), 得 Neumann 問題 (2.19) 的解

$$u(\boldsymbol{\xi}) = u_1(\boldsymbol{\xi}) - u_3(\boldsymbol{\xi}) = \iiint\limits_{\Omega} f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{x} - \iint\limits_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{6.46}$$

由邊界條件 (6.41) 或 (6.44) 可知 $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 的選取與基本解 Γ_3 有密切關係。首先 Γ_3 是一個半徑函數 (radial function), 所以 w 也必然是一個半徑函數而且長相與 Γ_3 非常相像。如果 Ω 有很好的對稱性, 則可透過光學或靜電學的鏡像點法 (method of image) 來構造格林函數, 有興趣的讀者可以參考 [20] 或相關著作。

如果是二維的情形, 1851 年德國偉大數學家黎曼 (B. Riemann 1826~1866) 在他的博士論文中一勞永逸地解決了這個問題。在這一部非常原創的作品中, 他提出了今天稱之爲 黎曼映射定理 (Riemann mapping theorem), 告訴我們可以解平面上每個單連通區域的 Dirichlet 問題和 Neumann 問題, 因爲它提供了一種構造該區域之格林函數的方法。最後要提的是格林從來沒有爲他的發現 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 命名, 而是隨著格林論文在德國的期刊出版, 數學物理的研究焦點轉移到了德國學術圈, 因此影響了 Dirichlet 與黎曼。隨後具有高尚人格的黎曼雖然對這個邊界值問題有突破性的貢獻, 但他把這問題歸功於 Dirichlet 稱之爲《*Dirichlet 問題*》, 並把其中最重要的函數 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 命名爲《格林的函數》(Green's function)。不得不令人感佩地說：

『使人不平凡的, 才是眞正的不平凡。』

參考文獻

1. Vladimir I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, 2003.

   Arnold 特別花了一整個單元 (Lecture 10) 專門談雙層位勢 (double layer potential), 我是在這本書弄清楚雙層位勢的物理意義。除此之外 Arnold 對於雙層位勢的幾何意義

也有非常完整的介紹。讀 Arnold 的書始終是一種享受, 雖然如此卻是要正襟危坐、努力思考付出代價的。

2. John B. Conway (1939-2024), *Functions of One Complex Variables I*, 2nd Edition, GTM Vol. 11, Springer-Verlag, 2001.

   這是我最喜歡也是最熟悉的複變教科書, 主要是這本書比較偏向分析。雖然作者的專長不是偏微分方程, 但仍然花一整章 (第十章) 專門談調和函數(harmonic function) 還有格林函數, 對於利用複變處理二維 Laplace 方程有興趣的讀者, 不妨接受我良心的建議, 說不定你不用讀兩遍就會愛上複變。

3. Peter Coveney and Roger Highfield, *The Arrow of Time*: A voyage through science to solve time's greatest mystery, Butler & Tanner Ltd, Frome and London, 1990. 中譯本: 時間之箭, 江濤, 向守平譯, 數學名著譯叢, 藝文印書館印行, 1992。
4. Dean G. Duffy, *Green's Functions with Applications*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.
5. Daniel Fleisch, *A Student's Guide to Maxwell's Equations*, Cambridge University Press, 2008. 中譯本: 電磁學天堂秘笈, (科學天地 118) 天下文化 , 鄭以禎譯, 2010。
   `https://www.danfleisch.com/maxwell/chapter1/problem1/index.shtm`.
6. Gerald B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Princeton University Press, 1995.

   我是讀 (碩士班) 研究所時開始接觸 Folland 的書, 從此喜歡上他的著作。張秋俊老師 (台大數學系退休教授) 曾經用這本書 (第一版) 作爲偏微分方程的教材, 有一次跟張老師聊天, 他告訴我這是一本好書, 但是第一版是打字版閱讀起來很不舒服而且沒有索引 (index), 還好所有這些缺點在第二版都被修正了。比 Arnold 的書還早, Folland 在這本書花了一整章完整討論單層與雙層位勢, 是我第一次感受到這個主題的重要性。雖然有此體會, 但由於是自己研讀限於學養, 只在腦海裡留存著朦朧的印象, 但是卻在內心深處發願：有朝一日弄淸楚一定把它變成通俗易懂的語言傳播出去。Folland 是數學大師 E. Stein 的學生, 所以書上有不少 Fourier 分析的蹤跡, 一些重要的主題 Folland 也會以簡單直觀的概念詮釋, 這是我個人最喜歡的地方。另外讀者有興趣可以看看他的參考著作, 除了專業書籍, Folland 也列了 American Mathematical Monthly 的 (數學教育) 文章, 而他本人也親自投入, 真是有心人。Folland 的 Philosophy 跟自己是如此相近, 難怪他是我最心儀的數學作家之一。

7. Bernard Friedman, *Principles of Applied Mathematics*, Wiley, 1956. (Dover Publication Inc., 1990)

   我是從 [10] 的書籍介紹知道這本名著, 但是直到去美國留學時, 才在學校的書店以不到 10 美元買到這本書, 自此 Friedman 的書就成爲我教學研究與寫作最重要的參考書。這本書寫得非常庫朗所 (Courant Institute): 好的應用數學是以堅實的純數學爲基礎。其中的格林函數寫得特別有特色, 尤其是利用複變的 Cauchy 積分公式來推得格林函數最讓人驚豔。在美國原版書是很貴的, 學生的教科書通常是不畫線, 到了期末再賣回去給書店。Dover 出版社於 1941 年成立, 它主要再版那些已被原出版社絕版的書籍。這些書籍通常 (但不總是) 屬於公有領域, 原版可能稀少或具有重要的歷史意義。Dover 出版社重新出版這些書籍, 使其價格大幅降低, 這實在是讀書人最大的福音。只要是 Dover 出版社找的到書絕對是高 CP 值, 肯定是值得擁有!

8. L. Gårding, The Dirichlet Problem. The Mathematical Intelligencer 2, 43-53, 1979.
9. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 224, Springer-Verlag, 1983.

   在台大讀研究所時與陳樹杰 (清華大學數學系退休教授) 一起研讀這本名著 (陳樹杰找陳金次教授開這門課! 我們兩人輪流講了一年, 黃振芳(讀博士班) 也在旁坐鎮)。我們讀的時候還是本書的第一版, 後來是陳樹杰寫信請六藝 (凡異) 出版社翻印第二版!

10. Michael D. Greenberg, *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, Dover Publication Inc., 2015.

    我還是學生的時候, 台灣的出版界印了不少好的翻版書, 在師資不足的年代這是很有貢獻的! 經過高微與抽象代數的訓練之後, 大三在學校的圖書部看到這本書, 發覺自己可以輕易克服, 於是便購買了一本。這是一本可愛的小書除了常微分方程之外也介紹偏微分方程的 Green 函數, 裡面的例題都是精挑細選, 對於理工科的學生特別合適, 另外本書的參考書籍還有簡略的書籍介紹, 真是令人耳目一新。書中另一特色就是介紹廣義函數的方式非常直觀且友善, 自我學習也沒有太多困難, 讀者對廣義函數有興趣不妨從這本書開始。作者是航太機械工程的教授, 卻有很好的數學涵養, 一點都不輸給數學系的老師, 這也說明爲何人家的工學院是如此堅強, 因爲他們的數學家是遍佈在學校的各個角落。

11. Richard Haberman, *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*(Classic Version) 5th Edition, Pearson 2018.

    讀者如果想自學格林函數卻又不想被那些厚重的書打敗, 可以考慮這本書的第九章。此書的第九章專注於 ODE 與 PDE 的格林函數 , 基本上已涵蓋一般需要的知識。基本概念掌握之後對這主題有興趣的讀者, 我會建議挑一個具體的微分方程 , 例如 Schrödinger 方程, 並建構其格林函數。我相信作爲碩士論文或大四的專題研究應該是夠份量! 說句良心話, 通常數學系大學部的微分方程都教不到這部分, 我個人覺得是非常可惜!

12. Ivar Stakgold and Michael Holst, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, 3rd Edition; Pure and Applied Mathematics Vol. 99, John Wiley and Sons, Inc., 2011.

    這本書是針對應用數學、工程與物理背景的學生而寫, 所以書寫的方式與傳統純數學的書有極大之差別, 直觀且友善。我在美國讀博士班的指導教授在工學院上的工程數學 (微分方程) 就是用這本書。本書重點放在利用格林函數 (Green function) 與固有函數展開 (eigenfunction expansion) 來處理邊界值問題 (boundary value problem)。我個人最喜歡作者介紹的廣義函數論 (或荷佈理論), 並把各種 Green 等式做了系統式的整理, 由此可以看出微分方程弱解 (weak solution) 的起源。

13. Paul Tillich, *A History of Christian Thought*: From its Judaic and Hellenistic Origins to Existentialism, Touchstone, 1968. 中譯本: 保羅-田立克 (或蒂利希), 基督教思想史 — 從其猶太和希臘發端到存在主義, 尹大貽譯, 東方出版社 (中國), 2008。

    保羅-田立克 (1886～1965) 是二十世紀最偉大的神學家之一, 與大數學家歐拉 (L. Euler) 及黎曼 (B. Riemann) 一樣都是基督教 (新教) 牧師之子。第一次世界大戰時他擔任德國隨軍牧師, 因此有機會接觸各種社會問題, 這個經歷促進了他對權威的反感與抗拒。一戰結束後田立克成爲一個神學教授, 但戰爭及其餘波在他生命印證了所謂的決定性的時刻。也正是這段經歷使他的神學思想 《*kairos*》(凱洛斯) 在此萌芽發展。正當他的學術生涯蒸蒸日上之時, 由於納粹-希特勒的興起而改變了他寧靜的教授生涯。田立克對於自

由的熱情關切, 雖然在大學教書同時他也參與宗教社會主義的活動並成爲其靈魂人物, 使他成了希特勒及其國家社會主義最早的批評者與反對者之一。也正是這個緣故, 1933 年受希特勒的納粹政權所報復而被解除教職, 並被逐出德國的所有大學。正如他後來自嘲說的那樣, 他是《享此殊榮》的第一個非猶太裔學者! 同年在美國神學家尼布爾 (Reinhold Niebuhr, 1892∼1971) 的幫助下逃離德國到紐約協和神學院任教, 此時他 47 歲在一個新的國家以新的語言開始工作。人們稱田立克是《神學家中的神學家》, 沒幾年他就成爲美國最著名的神學家! 退休之後又馬上被哈佛大學與芝加哥大學聘爲大學教授 (university professor)。田立克最受歡迎的是《信仰的能力》、《生之勇氣》這兩本書。大二閱讀之後猶如倚天屠龍記中的張無忌被打通任督二脈, 整個思想都通了。再回到數學就不會被定義、定理、證明這種三段式論證所綑綁, 如此自由釋放的感覺是無法以言語來描述。最後順便提一下, 從音譯而言 Tillich 翻成《蒂利希》是比較接近德文, 但是翻成《田立克》是經過他本人認證的 ! 從尊重作者之意願、史實與通俗性而言《田立克》才是最好的翻譯!

14. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
15. 吳大猷。電磁學。理論物理 Vol. 3, 聯經出版事業公司, 1982。
16. 林琦焜。向量分析。滄海書局, 2010。
17. 林琦焜。Green 定理與應用。數學傳播季刊, 21(4), 25-41, 1997。
18. 林琦焜。d'Alembert 的降階法, 數學傳播季刊, 46(2), 20-41, 2022。
19. 林琦焜。Lagrange 的參數變數法, 數學傳播季刊, 47(4), 15-41, 2023。
20. 林琦焜。哈那克兄弟們 (Harnacks) — 數學與神學的雙生子。數學傳播季刊, 48(4), 73-101, 2024。

—本文作者爲國立陽明交通大學應用數學系退休教授—